Math. P. 191 b

# Die Kegelschnitte;

elementarisch

geometrisch, algebraisch,

zum

Behuf der Vorlesungen abgehandelt

von

J. P. Gruson,

Dr. der Philosophie, Königl. Preuß. Geheimen-Hofrath, Professor bei der Berliner Universität, bei dem Königl. Kadettencorps, bei der Bauakademie und dem französischen Gymnasium, ordentlichem Mitgliede der Berliner Akademie der Wissenschaften, ꝛc. ꝛc.

Mit vier Kupfertafeln.

Berlin, 1820.

Verlag von Duncker und Humblot.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

# Vorrede.

Ueber Kegelschnitte ist in Deutschland wenig geschrieben worden, außer, was in unsern Lehrbüchern vorkommt. Daher darf ich wohl mit einiger Hoffnung mir schmeicheln, dieses kleine Werk, worin etwas mehr als in unseren gewöhnlichen Lehrbüchern über Kegelschnitte enthalten ist, mit Nachsicht aufgenommen zu sehen.

Es besteht aus zwei Theilen.

In den sieben ersten Kap., welche den ersten Theil ausmachen, glaube ich alles vereiniget zu haben, was durchaus jeder, der den mathem. Theil der Physik zu studiren wünscht, wissen muß. Ich habe mich bemüht, meinen Beweisen alle mögliche Leichtigkeit und Strenge zu geben. Die drei letzten Kap., welche den zweiten Theil ausmachen, werden besonders diejenigen interessiren, die sich mit den vornehmsten durch die neuere Analysis gemachten Entdeckungen bekannt zu machen wünschen. Im

achten Kap. sind jedoch zwei nöthige Lehrsätze zum Verstehen der Bewegungen der Körper in Kegelschnitten nach dem Newtonschen allgemeinen Gravitationssystem enthalten. Die Beweise sind in diesem Theil etwas zusammengezogener, indem ich darauf bedacht war, viel Sachen in wenig Worten zu geben, ohne doch die Deutlichkeit, welche das Hauptverdienst eines solchen Werks ist, zu vernachlässigen.

Das erste Kap., in welchem ich die Schnitte eines schiefen Kegels betrachte, dient dem ganzen Werke als Einleitung und ist rein geometrisch behandelt. Das zweite, dritte und vierte Kap. sollen die Anwendung der Algebra auf geometrische Gegenstände lehren. Die drei folgenden Kap. untersuchen jeden von diesen drei Kegelschnitten insbesondere. Aus der Beschreibung dieser Curven in einer Ebene mittelst ihrer Brennpunkte leite ich ihre vornehmsten Eigenschaften in Betreff ihrer Axen ab; und beweise, nachgehends, daß sie auch für die Diameter Statt finden, woraus ich die jeder insbesondere zukommende Gleichung ziehe. Endlich suche ich den algebraischen Ausdruck der vornehmsten Linien, als der Parameter, Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen.

Im siebenten Kap. gebe ich eine allen dreien gemeinschaftliche Construction, die von einer andern bloß angezeigten allgemeinern nur ein besonderer Fall ist. Vermittelst dieser Beschreibung kann man die Ellipsen und Hyperbeln zugleich abhandeln; zwei Curven, welche, obgleich ihre Gestalt so verschieden, doch nur eine auszumachen scheinen, so sehr stimmen sie in ihren Eigenschaften überein, deren algebraischer Ausdruck nur durch die Zeichen unterschieden ist. Die Parabel, welche die Grenze der Ellipse und der Hyperbel ist, wird ganz gleich aus der Ellipse oder aus der Hyperbel abgeleitet und kann, wie man es dienlich findet, zu dem elliptischen oder hyperbolischen Geschlechte gezählt werden. Der öftere Gebrauch, den ich von dem Unendlichen gemacht habe, um zu bereits bekannten und durch das Endliche erwiesenen Resultaten zu kommen, wird die Anfänger mit diesem metaphysischen Begriff bekannt machen, und ihnen zeigen, mit welcher Vorsicht sie eine so kitzliche Materie behandeln sollen. In diesem Kap. findet man eine Theorie der Krümmungshalbmesser für jeden Kegelschnitt mit ihren algebraischen Ausdrücken.

Endlich betrachte ich im neunten Kap. zuerst die Kegelschnitte von höherer Ordnung, komme

mittelst der von mir aufgestellten Lehrsätze sehr einfach zu dem allgemeinen Ausdruck der Subtangente von allen Curven parabolischen Geschlechts; und zeige die Quadratur dieser Curven, auf welche ich die der andern zurückführe, die nur ein Verein von Ordinaten parabolischer Curven sind, deren Anzahl endlich oder unendlich ist, je nachdem der algebraische Ausdruck der Ordinaten sich in eine Reihe von einer endlichen oder unendlichen Anzahl Glieder reduciren läßt, welches mir Gelegenheit giebt, die verschiedenen Quadraturen der algebraischen Curven aufzuzählen. Vermittelst der Reihen gebe ich die Quadratur der Kegelschnitte. Durch die nämlichen Mittel suche ich die Inhalte der hyperbolischen Trapeze und Sectoren; welches mich natürlich zur Theorie der Logarithmen führt, davon ich das Wissenswertheste erklärt habe.

Außer den Eigenschaften der Hyperbel, in Betreff der Logarithmen, hat diese Curve noch viel sonderbarere, wenn man sie in Betreff ihrer Asymptoten untersucht. Der unendliche Raum zwischen dieser Curve und der Asymptote giebt mir Gelegenheit, die Natur dieses Unendlichen zu untersuchen. Ich zeige nicht allein, daß dieser Raum unendlich

ist; sondern, wie er solches sein kann. Diese Betrachtung führt mich zu einem so hellen Prinzip, daß man sogleich mittelst seiner die Uebereinstimmung der sich ganz entgegengesetzt scheinenden Wahrheiten einsieht. Im zehnten Kap. endige ich dieses Werk mit einem allgemeinen Lehrsatz über die ähnl. Kegelschnitte, aus welchem man eine unendliche Menge seltener Wahrheiten über die innern und äußern Secanten ableiten und aus welchem man leicht zierliche Auflösungen von einer großen Anzahl von Aufgaben ziehen kann.

Die Methode, nach welcher ich alle vom zweiten Kap. an enthaltenen Gegenständen behandelt habe, ist die geometrisch-algebraische, welche die Relationen der in den drei Curven gezogenen geraden Linien durch Gleichungen ausdrückt, und aus diesen durch Rechnung, mit Zuziehung geometrischer Construktionen, neue Sätze und die Auflösungen der Aufgaben herleitet. Ich setze dabei nur voraus, daß der Leser bis incl. unreine quadratische Gleichungen zu lösen weiß. Diese Methode ist nicht so umständlich als die sonst zum ersten Studium sehr zu empfehlende, ganz rein geometrische, und weniger abstrakt als die analytisch-trigonometrische

Methode, wodurch man freilich Construktionen erspart und wodurch die ganze Behandlung einförmiger wird und welche eine faßlichere Uebersicht gewährt, aber auch weit mehr Umsicht und Uebung in der Analysis erfordert, die ich bei meinen Lesern nicht voraussetzen wollte. Mein Werk soll eine Vorbereitung sein, analytisch-trigonometrische Behandlung der Curven zu studiren, die ich diesem Werke nächstens werde folgen lassen.

Ich habe die Einrichtung getroffen, daß, wenn die Zeit oder sonst andere Gründe den Unterricht über die Kegelschnitte beschränken sollten, und man sich vorerst mit den Eigenschaften dieser Curven in Betreff ihrer Axen und rechtwinkligen Coordinaten bekannt machen will, man im V. Kap. von § 207, im VI. Kap. von § 287 und im VII. Kap. von § 368 anfangen kann zu lesen, und das Vorhergehende bei mehrerer Muße nachzuholen im Stande ist.

Berlin, den 1. May 1820.

Gruson.

# Inhalt.

Seite.

I. Kap. Von der Bildung des Kegels und seinen verschiedenen Arten. Von den Schnitten, die man in diesem Körper findet, wenn man ihn durch eine Ebene schneidet. 1

II. Kap. Allgemeine Prinzipien von der Anwendung der Algebra auf geometrische Gegenstände. . . . . 20

III. Kap. Auflösungen von mehreren bestimmten Aufgaben des ersten und zweiten Grades . . . . . . 24

IV. Kap. Von den unbestimmten Aufgaben mit zwei unbekannten Größen; von den krummen Linien im Allgemeinen . . . . . . . . . . 78

V. Kap. Von den Eigenschaften der Parabel in einer Ebene betrachtet . . . . . . . . . . 113

VI. Kap. Von den Eigenschaften der Ellipse in einer Ebene betrachtet . . . . . . . . . . 157

Seite.

VII. Kap. Von den Eigenschaften der Hyperbel in einer Ebene betrachtet . . . . . . . . . 178

VIII. Kap. Von den gemeinschaftlichen Eigenschaften der drei Kegelschnitte und der Krümmungshalbmesser . . . 221

IX. Kap. Von den Kegelschnitten höherer Ordnung, deren Quadratur und den hyperbolischen Logarithmen nebst Betrachtungen über den asymptotischen hyperbolischen unendlichen Raum . . . . . . . . . 251

X. Kap. Von den ähnlichen Kegelschnitten . . . 275

# Die Kegelschnitte.

## Erstes Kapitel.

### Von der Bildung des Kegels und seinen verschiedenen Arten. Von den Schnitten, die man in diesem Körper findet, wenn man ihn durch eine Ebene schneidet (Fig. 1).

§ 1. Erkl. Es sei ADB ein Kr. und S ein bel. P. außerhalb der Eb. dieses Kr.; läßt man durch diesen P. S eine unbestimmte gr. L. gehen, die sich um diesen P. S so herum drehet, daß sie immer zugleich durch den Umf. des Kr. ADB geht, so wird sie bei dieser Bewegung einen durch eine kr. Oberfl. SADBEA und durch den gegebenen Kr. eingeschlossenen Körp. erzeugen. Die Geometer nennen diesen Körp. einen Kegel.

§ 2. Erkl. Der feste P. S heißt die Spitze des Keg., der Kr. ADB seine Grdfl. und eine gr. L. CS, aus der Sp. S bis zum Mittelp. C der Grdfl. gezogen, ist die Axe des Keg.

§ 3. Erkl. Ein Keg. heißt ein gerader, wenn seine Axe CS auf der Eb. der Grdfl. perpd. ist; im Gegentheil heißt er schief.

§ 3. Zus. 1. Aus dieser Entstehung des Keg. folgt: 1) daß jede gr. L. aus der S. S, nach einem bel. P. im

Umf. der Grdfl. gezogen, nothw. in der conv. Fl. des Keg. liegt, und die Seite des Keg. heißt; 2) daß jede gr. L. aus der Sp. S, nach einem innerhalb der Grdfl oder außerhalb in deren erweiterten Eb. liegenden P. gezogen, auch innerhalb oder außerhalb des Keg. liegen wird; 3) daß jeder Schnitt mit einer Eb. durch die Sp. S und durch zwei P. im Umf. der Grdfl., wie SAD, nothw. ein Tr. ist. Denn die Durchschnl. SA, SD der Eb. mit der conv. Fl. des Keg. sind nach der Bildung des Kegels offenbar gr. L.; und auch AD ist eine gr. L., weil sie die Durchschnl. der Eb. mit der Grdfl. des Keg. ist.

§ 5. Zus. 2. Aus dieser Erkl. (§ 1.) folgt ferner: wenn man den Keg. mit einer Eb längs der Axe schneidet, so wird die Eb. in einem gr Keg immer auf der Grdfl. perpd., und in einem schiefen Keg. immer geneigt gegen die Grdfl. sein, wenn diese Eb. nicht etwa auch durch einen von der Spitze auf die Grdfl gefällten Perpd. geht. Um diesen triangularen Durchschn. von allen andern Tr, die man in schiefen Keg. schneiden kann, zu unterscheiden, und weil dieser Tr. bei der Untersuchung der Eigenschaft des Keg. von größerem Gebrauch ist, hat man ihn den Axentriangel genannt. In einem gr. Keg. sind also alle Axentr. auf der Grdfl. perpd., und in einem sch. Keg. kann es nur einen einzigen SDE geben, den man bestimmt, indem man von der Sp. S einen Perpd. SK auf den Kr. ADB fällt, und durch diese L. und durch die Axe des Keg. eine Eb. SKD legt.

§ 6. Zus. 3. Da die Grdfl. bel. von dem P. S entfernt sein kann; oder, welches auf eins hinaus läuft, da man sich die unbestimmte L. YZ so gr. denken kann, als beliebt: so folgt aus dieser Erzeugung des Keg. (§ 1.), daß dieser Körp. und seine conv. Fl. sich über und unter

der Sp. S ins Unendliche ausdehnen können. Denn es leuchtet ein, daß der Theil SZ dieser L. den Keg. SAB beschr., ihre Verl. SY die conv. Fl. SIL eines dem ersten ähnl. Keg. beschr. muß und der ihm an der Spitze entgegengesetzt liegt.

§ 7. Lehrs. Schneidet man einen beliebigen Kegel SAB mit einer Ebene EFH, parallel mit der Grundfläche, so wird der Schnitt ein Kreis sein. (Fig. 2).

Bew. Man ziehe die Axe SC, so wird diese die Eb. EFH in einem P. D treffen. Durch zwei bel. P. A, G im Umf. der Grdfl. ziehe man aus der Sp. S die gr. L. SA, SG welche die Eb. EFH in E und F schneiden werden; endlich ziehe man noch DE, DF, CA, CG.

Weil die Eb. EFH und AGB prll. sind, so werden auch ihre Durchsch. mit den Tr SCA, SCG prll. sein; und folgl. die Tr. SCA, SDE; SCG, SDF ähnlich sein. Die ersten geben:

CA : DE = SC : SD, und die zweiten geben:

SC : SD = CG : DF; also

CA : DE = CG : DF; aber

CA = CG (Halbm. eines Kr. § 1.) Mithin auch

DE = DF; und da man dasselbe für jede aus D nach dem Umf. EFH des Schnittes gezog. gr. L. bew. kann, so folgt hieraus augenscheinlich, daß dieser Schnitt ein Kr. ist.

§ 8. Erkl. Es sei SCD (Fig. 3) ein bel. Tr. durch die Axe, und in diesem Tr. eine gr. L AB prll. mit einer seiner S. SD. Wenn man in dem P. B, wo diese L. die Grdl. dieses Tr. schneidet, in der Eb des Kr. CND einen Perpd. NBn auf den Durchm. D desselben Kr. errichtet, so wird der Schnitt des Keg. mit einer Eb., welche durch die gr. L. AB, Nn geht, eine Curve sein, die man Parabel nennt.

Fig. 4 § 9. Es sei noch ein bel. Tr. SCD durch die Axe, dessen beide S. SC, SD durch eine gr. L. Aa geschn. sind, beide unter (Fig. 4) oder eine unter und die andere über der Sp. S (Fig. 5). Wenn man in dem P. B, in welchem diese Linie die Grdfl. CD des Tr., durch die Axe so weit als nöthig verl. trifft, in der Eb. CKD einen Perpd. N′Bn auf derselben L. CD errichtet, so wird der Schnitt des Keg. SCD durch eine Eb., die durch die gr. L. AB, N′n′ geht, eine geschlossene Curve AMamA (Fig. 4) sein, welche man Ellipse genannt hat, oder (Fig. 5) eine unbegrenzte Curve N′MAmn, die man Hyperbel genannt hat.

§ 10. Zus. Der Keg. kann also nur auf fünferlei Art geschn. werden, und folglich kann es auch nicht mehr als fünf verschiedene Arten von Kegelschnitten geben: 1) der Schnitt wird jedesmal ein Tr. sein, wenn die schneidende Eb durch die Sp. S geht (§ 4); 2) er wird ein Kr. sein, wenn die schneidende Ebene prll. mit der Grdfl. ist (§ 7.) 3) Eine Parabel, wenn der gemeinsch. Schnitt dieser Eb. und des Tr. durch die Axe prll. ist mit einer der S. desselben Tr. 4) Eine Ellipse, wenn derselbe gemeinsch Schnitt die beiden Seiten des Tr. unterhalb der Spitze schneidet. 5) Endlich eine Hyperbel, wenn derselbe Durchschn. der schneidenden Eb. und des Tr. eine von den S. des Tr. über und die andere unter der Sp. S schneidet. Man muß nicht übersehen, daß bei dieser letztern Lage der schneidenden Eb. sich noch eine neue Hyperbel Mam in dem Gegenkegel des Keg. SCD bildet, die, wie die Folge lehrt, angesehen wird, als mache sie mit der ersten MAm nur eine Curve aus. (Fig. 4 und 5).

§ 11. Erkl. Der gemeinsch. Durchschn. AB des Tr. durch die Axe in der schneidenden Eb. heißt Diameter (Durchm.) der Curve MAm. Er erhält der Namen

Axe, wenn der W. ABN′ ein rechter ist, welches bei einem gr. Keg. immer der Fall ist, und in einem sch. Keg. nur dann Statt findet, wenn der Tr. durch die Axe prd. auf der Grdfl. wäre. (Fig. 4 und 5.)

Die von einem P. M der Curve bis zum Diam. AB parallel mit BN oder BN′ gezogenen gr. L. MP, mP werden Ordinaten der Curve genannt.

Die P. A, a, wo der Diam. der Curve die S. des Tr. durch die Axe trift, sind die Scheitel der Curve oder die Anfangspunkte von diesem Diam., woraus folgt, daß die Parabel nur einen Scheitel haben kann, und ihre Diam. nur einen Anfgsp. haben können.

Die Theile oder Abschn. AP oder AP, aP des Diam., welche zwischen den Anfgsp. dieses Diam. bis zum Treffpunkt P der Ord. MP liegen, werden Abscissen genannt. Woraus wiederum folgt, daß jede Ord. PM in der Parb. nur eine endliche Absc. AP haben kann.

§. 12. Lehrs. In einer beliebigen Parabel verhalten sich die Quadrate $PM^2$, $BN^2$ der Ord. PM BN auf dem Diameter AB, wie ihre corresp. Absc. AP und AB. (Fig. 3).

Bew. Durch MP lege man eine Eb. FMG prll. mit der Grdfl. des Keg.; der Durchschn. dieses Körp. mit gedachter Eb. wird ein Kr. sein, dessen Durchm. FG (§ 7.), und da nach der Constr. BN perpd. auf dem Durchm. CD ist, so wird auch die ihm prlle PM ebenfalls auf dem Durchm. FG perpd. sein; es werden also die L. MPm, NBn in den P. P, B halbirt, und ihre Hälften PM, BN Ord. in den Kr. FMG, CND sein; Man hat daher für die eine

$MP^2 = FP \,.\, PG$, und für die andere $NB^2 = CB \,.\, BD$;

mithin $MP^2 : NB^2 = FP \,.\, PG : CB \,.\, BD$ oder

$= FP : CB$, weil PG und BD, die

zwischen den Prllen. AB und SD liegen, gl. sein müssen. Da aber FP, CB prll. sind, so ist $\triangle CAB \backsim \triangle FAP$ und geben $FP : CB = AP : AB$, folglich wird man aus eben dem Grunde haben

$$MP^2 : NB^2 = AP : AB.$$

§ 13. Lehrs. In der Ellipse und Hyperbel verhalten sich die Quadrate $PM^2 : QN^2$ von zwei beliebigen Ordinaten PM, QN auf einem Diameter AB wie die Rect. oder Produkte $AP \cdot aP$, $AQ \cdot aQ$ aus der dieser Ordinate correspondirenden Abscissen Ap, aP, AQ, aQ. (Fig. 4 und 5).

Bew. Durch die Ord. PM, QN lege ich prll. mit der Grdfl. des Keg. die Eb. FMG, HNL; die Durchschnitte FMGm, HNLn werden Kr. deren Durchm. FG, HL (§ 7). Da überdem durch Constr. die L. N'Bn' perpd. auf CD ist, so werden die ihnen prllen L. MPm, NQn, jede respec. perpd. auf dem Durchm. FG, HL sein; mithin sind sie durch dieselben Diam. und durch den Aa von der Curve MAm halbirt. Dieses zugegeben, hat man, wegen den Kr. FMG, HNL

$$MP^2 = FP \cdot PG \text{ und } NQ^2 = HQ \cdot QL;$$

mithin $MP^2 : NQ^2 = FP \cdot PG : HQ \cdot QL;$

aber die Tr. PAF, QAH, GaP, LaQ sind ähnlich, weil ihre Grdfl. in Prllen. FG, HL liegen, und geben die zwei

Proportionen: $\left\{\begin{array}{l} FP : HQ = AP : AQ \\ GP : LQ = aP : aQ \end{array}\right\}$ und hieraus hat

man $FP \cdot GP : HQ \cdot LQ = AP \cdot aP : AQ \cdot aQ;$

woraus augenscheinlich folgt, daß

$$MP^2 : NQ^2 = AP \cdot aP : AQ \cdot aQ \text{ sei.}$$

§ 14. Anmerk. Die zwei so eben erwiesenen Lehrsätze enthalten die vornehmsten Eigenschaften der Kegelschnitte in Bezug auf ihre Axen oder in Bezug auf ihre Diameter. Die nachfolgenden §§en werden zeigen, mit welcher Leichtigkeit und Eleganz man eine

große Anzahl anderer schönen Eigenschaften dieser Curven immer, in Keg. gedacht, erweisen kann.

§ 15. Zus. Wäre der △SCD (Fig. 4) ein Azentr.△ (§ 5.); Sa = SH und SA = SL, so wäre △SaA ∽ △SHL, also ∠SaA = ∠SHL = ∠SCD, d. h. der Schn. AMNA wäre antiparallel mit der Grdfl. CKD oder ein Wechselschnitt, und dieser ist ebenfalls ein Kr., weil, wenn man sich den Keg. SaA gewendet denkt, so daß a in H und A in L zu liegen kommt, auch die Grdfl. AMNa den Kr. HNL, so wie überhaupt, die Keg. SaA und SHL sich decken müssen. Man übersehe hier die Bedingungen nicht, daß der △SCD ein Azentr. (§ 5.) sein soll, denn in jedem andern Falle wäre selbst der Wechselschnitt kein Kreis.

§ 16. Erkl. Sucht man (Fig. 5) zu den Coord. AP, PM eine dritte Proportionale p, so nennt man diese Linie $p = \frac{PM^2}{AP}$ den Parameter der Parabel

§ 17. Lehrs. In jeder Parabel ist das Quadrat gleich dem Rect. aus dem Parameter und der corresdirenden Absciße. (Fig. 3).

Bew. Nach § 12. ist

$$PM^2 : BN^2 = AP : AB,$$

also auch $PM^2 : BN^2 = p.AP : p.AB.$

Nun ist $PM^2 = p.AP$ (§ 16.),

folgl. auch $BN^2 = p.AB.$

§ 18. Erkl. Bezeichnet man die Absc. mit x und die Ord. mit y, so ist immer für jedes Paar zusammengehöriger Coord. $y^2 = p.x$, und diese Relation heißt die Gleichung der Parabel.

§ 19. Lehrs. In der Parabel verhält sich der Parameter p zu dem Theil SA zwischen dem Scheitel der Curve

und der Spitze des Tr. durch die Axe, wie das Quadrat $CD^2$ der Grundlinie dieses Tr. zu dem Rect. $SC \cdot SD$ aus den beiden Seiten des Tr. (Fig. 3).

Bew. $BN^2 = p \cdot AB$ (§ 17.) $= CB \cdot BD$ wegen der Eigensch. des Kr. CND, daher

$$p \cdot AB : AB^2 = p : AB$$
$$= p \cdot SA : AB \cdot SA,$$

also
$$CB \cdot BD : AB^2 = p \cdot SA : AB \cdot SA,$$

oder
$$CB \cdot BD : p \cdot SA = AB^2 : AB \cdot SA$$
$$= AB : SA$$
$$= AB \cdot SA : SA^2,$$

oder
$$CB \cdot BD : AB \cdot SA = p \cdot SA : SA^2$$
$$= p : SA.$$

Zieht man $AE \parallel CD$, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} AE \text{ oder } BD : AS &= CD : CS \\ \text{und} \quad CB : BA &= CD : DS \end{aligned}\right\}.$$

Mithin $CB \cdot BD : AB \cdot AS = CD^2 : SC \cdot SD,$

also auch $p \cdot AB : AB \cdot AS = CD^2 : SC \cdot SD,$

folglich $p : AS = CD^2 : SC \cdot SD.$

§ 20 Zus. 1. Hieraus folgt, daß, wenn der Tr. durch die Axe gleichseitig ist, der Parm. alsdann gl. der Entf. der Sp. des Keg. von dem Scheitel der Parb.; denn in diesem Falle ist $CD = SC = SD$. Allgemeiner kann diese Wahrheit so ausgedrückt werden: der Parm. ist gl. der Entf. der Sp. des Keg. von dem Scheitel der Curve, so oft die Grdl. des Tr. durch die Axe die mittlere Proportionale zwischen den beiden S. des Keg. ist.

§ 21. Zus. 2. Es seien a und c die beiden S. des Tr. durch die Axe und b seine Grdl.; macht man in diesem Keg. zwei prll. Parabelschnitte, deren Scheitel von der Sp. des Keg. um m und n entfernt liegen und deren Parm. p, P wären, so ist nach § 19.

$p : m = b^2 : a . c$ und auch

$P : n = b^2 : a . c,$

folgl. $p : P = m : n,$

woraus folgt, daß die Parm. von versch. unter sich und mit der S. des durch die Axe gehenden Tr. prllen Schnitte sich wie die Entf. ihrer Scheitel von der Sp. dieses Tr. verh.

§ 22. Zus. 3. Wenn man sich den Axentr. (§ 5.) denkt, so wird der Diam. die Axe der Parb. (§ 11.), und denkt man in dieser Axe einen Punkt F um $\frac{1}{4}$ des Param. vom Scheitel der Parb. entf., so heißt dieser P. der Brennpunkt der Parb., und zieht man durch diesen P. und die Sp. des Keg. eine gr. L., so wird diese L. durch die Brennp. aller mit der ersten prlle. Parb. gehen, denn es entstehen ähnl. Tr., in welchem $m : n = \frac{1}{4}p : x$, aber nach § 21. ist auch $m : n = p : P$

$= \frac{1}{4}p : \frac{1}{4}P,$

folglich muß $x = \frac{1}{4}P$ sein,

d. h. die gedachte gr L. geht auch durch den Brennp. der 2ten Parabel.

§ 23. Zus. 4. Allgemeiner läßt sich dieses so ausdrükken: Wenn durch die S. eines bel. Keg. und durch einen bel. P. in der diesem Keg. geschn. Parb. eine gr. L. geht, so wird diese L. durch alle in allen denkbaren mit der ersten prllen. Parb. ähnl. liegende P. gehen, und umgek., wenn irgend eine L. durch zwei in zwei versch. unter sich prllen. Parb. ähnlichl. P. geht, so geht sie auch nothwendig durch die Sp. des Keg., in welcher diese Parb. geschnitten sind.

§ 24. Lehrs. Aus einem beliebigen Kegel eine Parabel zu schneiden, deren Parameter p für die Axe gegeben ist.

Aufl. Man bestimme in dem Keg. zuerst den Axentr. (§ 5.), die S. dieses Tr. seien a und c, und b die Grdl.

und x die Entf. des Scheitels der verl. Parb. von der Sp. des Keg., so ist nach § 21,

$$a \cdot c : b^2 = p : x;$$

durch den durch dieses x bestimmten P. geht die gesuchte Parabel.

§ 25. Erkl. Eine gr L. Er, die den Diam. Aa in R halbirt und prll. mit den zu dem Diam. gehörigen Ordin. geht, heißt der conjungirte Diam. des ersten (Fig. 4).

§ 26. Lehrs. Der halbe conjungirte Diameter RE ist die größte Ordinate auf dem Diameter Aa; ferner zwei von dem conjungirten Diameter gleich weit abstehende Ordinaten PM, QN sind einander gleich. (Fig. 4).

Bew. 1) Nach § 13 ist $PM^2 : RE^2 = AP \cdot Pa : AR \cdot Ra$.

In einem Halbkr. über Aa ist das Qdr der einen Ord. $= AP \cdot Pa$ und das Qdr von der Ord im Mittelpunkte $= AR \cdot Ra$; da nun die Ord. im Mittelp die größte ist, so ist auch $AR \cdot Ra$ größer als $AP \cdot Pa$, also auch $RE > PM$.

2) Die von R gl weit abstehenden Ord. wie PM und QN sind einander gl., denn ihre Qdr. verhalten sich, wie $AP \cdot Pa$ zu $AQ \cdot Qa$ und diese Rect. sind gl.

§ 27. Erkl. Eine dritte Proport. p zu zwei conj. Diam. Aa, Er heißt der Parameter des Diam., welcher in dieser Propt. das erste Gl. einnimmt.

§ 28 Zus. Aus dieser Erkl folgt, daß das Rect. aus einem Durchm und seinen Parm. gl. ist dem Qdr. seines conj Diam (Fig 4).

Denn da $Aa : Er = Er : p$, so ist $p \cdot Aa = Er^2$.

§ 29. Lehrs. Zieht man durch die Spitze S eines Kegels (Fig. 4) ST parallel mit dem Diameter des Schnittes AEa, bis sie die Grundlinie des durch die Axe gelegten Dr. gehörig verlängert in T trifft, so giebt das vierte Glied

der folgenden Proportion den Parameter p des Diameters Aa.

Bew. AP . Pa : PM² = Aa² : Er² (§ 15) und da p der Parm. des Diam. Aa sein soll, so hat man aus § 28

$$Aa^2 : Er^2 = Aa : p, \text{ folglich}$$

$$AP . Pa : PM^2 = Aa : p.$$

Um also darzuthun, daß dieses so bestimmte p wirklich der Parm. des Diam. Aa sei, ist es hinreichend, zu zeigen, daß

$$ST^2 : CT . DT = AP . Pa : PM^2 \text{ sei.}$$

Dieses kann so geschehen:
die ähnlichen Tr. CST, APF, die aus einer der S. des Tr. durch die Axe und von Linien prll. mit der Grdl. des nämlichen Tr. gebildet sind, geben

$$ST : CT = AP : PF;$$

und wegen der Aehnl. der Tr. STD, aPG hat man ebenfalls

$$ST : DT = aP : PG;$$

diese zwei Propt. zusammengesetzt geben

$$ST^2 : CT . DT = AP . Pa : FP . PG,$$

aber $FP . PG = PM^2$.

Mithin $ST^2 : CT . DT = AP . Pa : PM^2$.

Woraus also augenscheinlich folgt, daß das durch diese Proportion bestimmte p der Parm. des Diam. DE sei.

§ 30. Zus. 1. Weil ST² : CT . DT = Aa : p, so folgt hieraus, daß man auch haben wird

$$ST^2 : CT . DT = Aa^2 : Er^2,$$

d. h., daß das Qdr. der in der Ebene des Tr. durch die Axe und durch die Sp. S des Keg. prll. mit dem Diam. Aa des Schnittes gezogenen L. ST sich zu dem Rect. der Abschnitte auf der Grdl. des Tr. durch die Axe hinlänglich verl. verh. wie das Qdr. des Durchm. Aa zu dem Qdr. seines conj. Diam. Er.

§ 31. Zus. 2. Es folgt hieraus noch ferner, daß

$$AP . Pa : PM^2 = AB . aB : CB . DB;$$

denn wegen der Aehnlichkeit der Tr. APF, ABC wird man haben

$$AP : PF = AB : BC$$

und wegen der Aehnlichkeit der Tr. PaG, DaB;

$$Pa : PG = aB : BD$$

beide Propt. zusammengesetzt geben

$$AP . Pa : FP . PG = AB . aB : BC . DB;$$

da nun $FP . PG = PM^2$, so ist auch

$$AP . Pa : PM^2 = AB . aB : BC . DB.$$

§ 32. Zus. 3. Aus den beiden letzten Zus. folgt, daß im Kr. die conj. Diam. immer gl. sind, und daß die Qdr. der Ord. gl. den Rect. aus ihren Absc.; denn wenn der Schnitt ein Kr. ist, so werden die L. ST und CT prll. und unendlich das Qdr. $ST^2$ und das Rect. CT . DT werden einander gl., und in dem Falle des 2ten Zus. werden die L CB, AB prll. und unendlich so wie die L. aB, DB; daher werden die Rect. AB . aB, AB . DB einander gl.; folglich $PM^2 = AP . Pa$.

§ 33. Zus. 4. Denkt man sich in dem Keg. noch eine zweite Ellypse prll. mit der ersten, deren Diam. A′a′, so bestimmt man den zu diesem Diam. A′a′ gehörigen Parm. p′ durch folgende Propt.

$ST^2 : CT . DT = A'a' : p'$, daher haben wir auch

$$Aa : p = A'a' : p',$$

folgl. sind alle in einem Keg. durch prll. Eb. geschnittene Ellipsen einander ähnlich, weil ihre Diam. ihren Parm. proportional sind.

§ 34. Zus. 5. Es folgt hieraus ferner, daß, wenn man durch die Sp. des Keg. und durch irgend einen P. in der Ellipse eine gr. L. zieht, diese L. durch alle ähnlich

liegende P. geben wird, die in den in demselben Keg. durch prll.-Eb. geschnittenen Ellipsen liegen.

§ 35. Anmerk. Es folgt hieraus, daß, wenn von einer Ellipse beide Axen oder nur eine Axe und ihr Parm. gegeben, man immer in jedem bel. Keg. eine dieser gl. Ellipsen schneiden kann. Denn die Propt. des Lehrs. (§ 29) ist zureichend, um die Aufg. zu lösen. Denjenigen, die einige Uebung in der Algebra haben, will ich diese Aufg., die nothwendig vom 2ten Grade ist, zur eigenen Uebung überlassen und nur bemerken, daß wenn die Axe in der Parm. gegeben, so muß man in einem schiefen Keg., wie für die Parabel, damit anfangen, den Axentr. zu bestimmen; damit die Ord. perpd. auf der Axe seien. Hat man nur einen Diam. und sein Parm., so müßte man überdem noch den Coordinatenwinkel kennen. Die Aufl. ist im letztern Falle allerdings etwas verwickelter.

§ 36. Lehrs. Zieht man durch die Spitze S eines Kegels in der Ebene des Axendurchschnitts eine gr. L. ST parallel mit dem Durchmesser AB des Schnitts, so ist das 4te Glied p in folgenden Propotionen.

$$ST^2 : CT \, . \, DT = Aa : p$$

der Parm. des Diam. Aa. (Fig. 5).

Bew. Die ähnl. Tr. DST, DaB geben:

$$ST : TD = aB : BD$$

die ähnl. Tr. TCS, BCA geben

$$ST : TC = AB : BC;$$

aus der Zusammensetzung beider Propt. ergiebt sich

$$ST^2 : CT \, . \, TD = aB \, . \, AB : CB \, . \, BD,$$

Wegen des Kreises CKD und der Hyperbel, in welcher BN' eine Ord., ist $aB \, . \, AB : CB \, . \, BD = BN'^2 : Er^2 = aA : Er^2$ (indem man wie § 25. Er als den conj. Diam. zu aA annimmt), und der Natur des Parm. gemäß ist

$$Aa^2 : Er^2 = Aa : p;$$

folgl. $ST^2 : CT . CD = Aa : p$,
woraus ganz evident folgt, daß p der Parm. ist.

§ 37. Zus. 1. Hieraus folgt, daß alle unter sich prll. und in einerlei Keg. geschnittenen Hyperb. einander ähnl. sind, weil die ähnlich liegenden L. prop. sind; denn denkt man sich irgend eine andere Hyperb. prll. mit der ersteren, so beweise man eben so, daß das Verh. des Durchm. zum Parm. gl. dem Verh. $ST^2 : CT . CD$, welches zur Ableitung dieser Wahrheit hinreicht.

§ 38. Zus. 2. Es folgt hieraus ferner, daß, wenn man durch die Sp. S irgend eines Keg. und durch einen bel. P. in einer Hypb. eine unbestimmte gr. L. zieht, sie durch alle ähnl. liegende P. gehen wird, die in allen möglichen mit der ersten prll. liegenden Hypb. befindlich sind; und umgek. eine gr. L., die in zwei ähnl. und prll. Hyperb. durch ähnl. liegende P. geht durch die Sp. S des Keg. Dieses folgt unmittelbar aus § 37.

Man darf also behaupten, daß überhaupt in einem Kegelschn. eine gr. L., die durch die Kegelspitze und durch einen P. dieses Schnittes geht, auch durch alle ähnl. liegende P. geht, welche sich in allen mit diesen prllen Schnitten befinden. Also die Eigensch. der Kegelaxe, welche durch die Mittelp. der mit der Grdfl. prll. Kr. geht, wird allgem. und erstreckt sich auf alle Kegelschn.

§ 39. Zus. 3. Wenn ST die mittlere Propt. zwischen CT und TD ist, so ist der Parm. dem Durchm. gl; woraus folgt, daß die Hypb. gleichseitig ist. Man kann ferner hieraus schließen, daß man in einem Keg., dessen Dr. durch die Axe an der Sp. einen spitzen W. hat, keine gleichs. Hybp. schneiden kann; denn leicht wird man sich überzeugen, daß in einem Dr. wie CSD eine L. wie ST von der

Sp. bis zur Grdfl. nur eine mittlere Propt. zwischen CT und TD sein kann, wenn der W. CSD ein rechter oder stumpfer W. ist.

§ 40. Zus. 4. Siebt man die gleichs. Hypb. als die größtmögliche an, so kann man mittelst dieses Satzes in einem gegebenen Keg die größtmögliche Hypb. schneiden, d. h. diejenige, welche sich der gleichs. Hypb. am meisten nähert. Dazu braucht man nur eine L. ST so zu bestimmen, daß ihr Quadr. das kleinstmögliche und das Rect aus CT und TD das größtmögliche sei; wäre z. B. der Keg. ein gerader, und ST auf CD perpd, so wäre ST die kleinste L., die man von der Spitze S nach der Grdl des Axentr. ziehen kann, und das Rect. aus CT und TD wäre das größtmögliche, weil diese L. durch ST in der gegenwärtigen Annahme in zwei gl. Theile getheilt ist. Das Verh von CT . TD zu $ST^2$ nähert sich also der Gleichh.; der Parm. wird also auch der größtmögliche in Bezug auf den Diam. sein, und folgl. wird diese Hypb. die genähertste der gleichs. Hypb. sein.

§ 41. Zus. 5. Wenn der Diam. Aa der Hypb mit einer S. des Keg. prll. wird, so fällt die L. ST mit der S. SD zusammen, der Theil TD wird o, und folgl das Rect. aus CT und TD = CT . o = o. Mithin wird das Verh. des Diam. gl. dem Verh. von $ST^2$ zu o. Woraus unwiderleglich folgt, daß die Curve, welche in diesem Fall eine Parb. ist, die kleinstmögliche Hypb. wird, und daß die Parb. wirklich als eine Hypb. angesehen werden kann, deren Durchm. unendlich ist.

§ 42. Zus. 6. Vermittelst dieses Satzes kann man auch aus einem Keg. eine Hypb. schneiden, deren Axen oder deren Diam. der Größe nach gegeben wären, und die Aufg. wäre immer zweier Aufl. fähig, so lange die Diam. oder die

gegebenen Axen nicht einen Asymptotenwinkel, der größer ist als der der größtmöglichen Hypb, welche man aus dem gegebenen Keg. schneiden könnte. Wenn die Diam. oder die Axen der größtmöglichen Hypb. gehören, so werden die beiden Wurzeln der Gleichung gl. sein. Im Fall eines größern W. wird die Aufg. für den gegebenen Kegel unmöglich.

§ 43. Anmerk. Es ist wohl zu merken, daß wenn wir von der möglichgrößten Hypb. sprechen, wir darunter nicht diejenige verstehen, welche die zwei möglichgrößten Diam. hat, sondern überhaupt diejenigen, deren Asymptotenwinkel dem rechten W. am nächsten in einem Kegel ist, dessen W. CSD spitz. Von diesem Geschlecht sind alle Hypb., welche in einem gr. Keg. durch Eb. gebildet werden, die mit den Axentr. prll. gehen, oder durch Eb., die auf der Grdfl. des Keg. perpd. sind.

§ 44. Erkl. (Fig. 6) Wenn man durch den P. K in welchem die mit den Diam. der Hypb. prlle. L. SK die Grdl. des Tr. durch die Axe trifft, eine gr. L. IKL prll. mit dem gemeinsch. Durchschn. FH der schneidenden Eb. mit der Grdfl., so soll diese L. Directrice des Scheitels FDH genannt werden, und die durch SK und IKL gelegte Eb. ISL soll die Eb. der Directrice heißen. Zwei Schenkel eines W., zwischen welchen die Hypb. liegt, und die sich den Zweigen der Hypb. unaufhörlich nähern, ohne sie je erreichen zu können, heißen die Asymptoten der Hypb. und ihr W. der Asymptotenwinkel.

§ 45. Lehrs. Es sei alles, wie in der vorhergehenden Erkl. Wenn man durch die Endpunkte I, L der Directrice, an die dem Kegel als Grundfläche dienenden Kr. die Tangente MI, NL, so weit verlängert zieht, bis sie sich in O auf der Grundlinie des Tr. durch die Axe ebenfalls verlängert schneiden: und wenn man durch SI, MIO; SL, NLO zwei so weit als nöthig verlängerten Ebenen

lege

legt, so werden die Linien CM, CN in welchen sie den Ebenen des Schnitts FDH begegnen, die Asymptoten von dieser Hyperbel sein.

Bew. Durch den Scheitel D der Hypb. lege man die Eb. PDQo prll. mit der Grdfl. des Keg.; diese Eb. wird die Eb. CMO, CNO in Po, Qo schneiden, so ist Po || MO und QO || NO; und leicht wird man auch erweisen, daß Po, Qo Tg an den Kr. Dibl in den Endp. i, l des gemeinsch. Durchschn. der Eb. PDQo mit der Eb. SIL der Diam. sein werden. Da die L. PDQ in der Eb. DFH liegt, so wird sie auf Db perpd., und folgl. in D eine Tg. sein. Es ist also $DP^2 = Pi^2$; und eben so $MH . MF = MI^2$; wir haben schon gesagt, daß MI || Pi und auch MP || Ii, weil die beiden letzten die Durchschn von prllen. Eb. mit einer dritten sind; IMPi ist also ein Prllgrm, mithin MI = Pi; folgl. $DP^2 = MF . MH$.

Auf eben diese Art kann man zeigen, daß, wenn mfgh || MFGH, auch $DP^2 = mf . mh$ Hieraus sieht man, daß, indem mh, MH wächst, mf, MF abnehmen muß; wie groß aber immer MH werden mag, so kann doch nie MF ganz verschwinden, da das Rect. MF. MH immer einem beständigen Qdr. $DP^2$ gl. sein muß; da nun DP = DQ, Pi = Ql, so folgt daß die Schenkel CM, CN sich zwar den Zweigen DF, DH der Hypb unaufhörlich nähern, aber solche nie erreichen können, und sind also diese L. die Asymptoten der Hyperbel.

§ 46. Anmerk. Wir haben angenommen, daß die Durchschnittsl. lo, io der Eb. CMO, CNO mit der Eb PDQo Tang. in den Endp. der Sehne il wären, welche die Durchschnittsl. derselben Eb. mit der der Directr. ist. Dieses kann so bewiesen werden: IO, LO sollen in J, L Tg. sein und sich in O auf der Verl. des Durchm. AB schneiden, die L. SB von der Sp. S bis zum

Mittelp. R der Grdfl. des Keg. wird auch durch den Mittelp. r des mit der Grdfl. prll. Kr. Dibl gehen; die ähnl. Tr. SRK, Srk geben

RK : rk = SK : Sk; und wegen der ähnl. Tr. SKB, Skb

hat man SK : Sk = KB : kb,

folgl. RK : rk = KB : kb,

daher RK : rk = RK + KB oder RB : rk + kb oder rb, und wegen der ähnl. Tr. SRO, Sro hat man

SR : Sr = RO : ro;

die L. RK, RB, RO, sind also den L. rk, rb, ro propt.; da nun wegen der Tg. IO

RK : RB = RB : RO, so ist auch

rk : rb = rb : ro, woraus folgt, daß io eine Tg. in i ist, weil der P. i in der Oberfl. des Keg. liegt und der Endp. der Ordn. ki ist.

§ 47. Zus. 1. Es folgt aus dem Satze ferner, daß die gemeinsch. Durchschnl. Oo der Eb. MPoO, NQoO nothwendig durch die Sp. S des Keg. geht, daß sie in der Eb. des Tr. durch die Axe liegt, welche den Schnitt FDH halbirt, und daß C wo sie, so wie MP, NQ verl. zusammenlaufen, der Mittelp. der entgegengesetzten Hypb. ist.

§ 48. Zus. 2. Es folgt hieraus ferner, daß eine auf der Verl. der Tg. MIO genommene L. MI, welche zwischen der Ebene der Directr. und der Eb. des Schnitts, der halbe conj. Diam. zu dem halben Diam. DC ist; dieses folgt aus Eigensch. der conj. Diam. in Bezug auf die Asymptoten und wird in der Folge erwiesen.

§ 49. Zus. 3. Ist der Tr. durch die Axe gleichsch., und der Schnitt FDH perpd. auf der Grdfl. des Keg., so wird die Eb. der Directr. auch ein Tr. durch die Axe, die Directr. Il wird ein Diam., MI, NL werden prll sein, und in diesem Falle werden auch die L. CSO, GKO prll. sein; woraus folgt, daß CS die halbe conj. Axe zu der Axe DE des

Schn. FDG ist. Dieses könnte man direct, wie folgt, bew. Wenn der Tr. durch die Axe gleichsch. ist, und die L EDG, SK prll. und perpd. auf der Grdst. AB desselben Tr, so wird der Tr. ESD auch gleichsch. sein; CS wird auf DE perpd. und prll. mit AB sein. Folgl.: die Tr. ECS, EGB werden ähnlich sein so wie auch die Tr. DCS, DGA; die ersten geben EG : GB = EC : CS und die zweiten geben auch

$$GD : GA = DC : CS,$$

mithin $EG \cdot GD : GB \cdot GA = EC \cdot DC : CS^2$.

Aber wegen der Kr. ist $GB \cdot GA = GF^2$,

und da $EC = CD$, so ist $EC \cdot DC = DC^2$; man hat also

$$EG \cdot GD : FG^2 = DC^2 : CS^2:$$

Woraus evident folgt, daß DC, CS die halben conj. Axen der entgegengesetzten Hypb. sind.

§ 50. Zus. 4. Wenn der W. DGA = W. SBA, so wird die Hypb. in diesem Falle eine Parb., die P. I, L der Directr. fallen in einen P. B zusammen; die L. MI, NL machen alsdann nur eine Prlle. mit FGH, welche der Eb. des Schn. auf beiden S. nur in einer unendlichen Entf. begegnen könnte, woraus folgt, daß die Parb keine Asymptoten haben kann, weil die L., welche die Asymptoten bestimmen, sich nie begegnen können, wenn die Hypp. eine Parab. wird.

§ 51. Anmerk. Wer das Vorhergehende gut begriffen hat, wird einsehen, daß die Demonstration der Kegelschn. in dem Keg. selbst betrachtet, sich so fort und mit eben der Leichtigkeit auf die Diam. wie auf die Axen jeder dieser Curven erstreckt. Auf diese Art ist man nicht gezwungen, mit den Axen anzufangen, um zu den Diam. überzugehen, wie es in der Folge geschehen soll; dieser Uebergang ist immer schwierig für Anfänger, wenn man diese Curven in einer Ebene untersucht, welcher Methode man sich auch bedienen mag, der analytischen oder der synthetischen.

# Zweites Kapitel.

## Allgemeine Prinzipien von der Anwendung der Algebra auf geometrische Gegenstände.

§ 52. Die Größen, welche den Gegenstand der Geom. ausmachen, d. h. die Linien, die Flächen und die Körper haben unter sich Beziehungen, welche durch Gleichungen, nach den Regeln, welche die Algebra für die Größen überhaupt vorschreibt, ausgedrückt werden können. Die Anwendung der Algebra oder der Analyse auf die Geom. bestehet in der Kunst, diese Gleichungen zu bilden. Will man nicht oft in zu lange, abstrakte Schlüsse sich einlassen, fähig, die Aufmerksamkeit der Anfänger zu ermüden oder ganz zu erdrücken, die zu erhalten doch wesentlich ist, so muß man selbst in der Elementar-Geom sich dieser analytischen Methode bedienen. Ich will also in diesem Kapitel die Anwend. der Algebra auf die Geom. entwickeln, und den Leser in Stand setzen, diesen interessanten Zweig der neuern Geom. zu ergründen.

§ 53. Welcher Gattung die Aufg. auch sein mag, so muß man, um sie aufzulösen, sehr aufmerksam ihre Bedingungen überdenken, diese Bedingungen durch Gleichungen ausdrücken, ohne die unbekannten Größen von den gegebenen zu unterscheiden, und aus der Endgleichung die uns nöthige unbekannte ziehen. Die Größen, welche bei geom. Aufg. vorkommen, haben, die einen in Bezug auf die andern, Primordial-Eigenschaften, die uns, aus der Natur der Größen überhaupt, oder durch die Elemente der Geom. bekannt sind, und die dazu dienen, die charakteristischen und

individuellen Eigenschaften der aufzulösenden Frage durch Gleichungen mit einander zu verbinden. Einige von diesen allgem. Eigensch., deren wir uns häufig bedienen werden, sind folgende.

§ 54. Das Ganze ist gl. der Summe aller seiner Theile. Hat man also von einem aus einer gewissen Anzahl von Theilen bestehenden Ganzen den algebraischen Ausdruck von diesem Ganzen und seinen Theilen, mit Ausnahme von einem, so wird man den Ausdruck von diesem haben, indem man von dem Werthe des Ganzen die Summe der Werthe von den Theilen, von denen man die besondern Ausdrücke hat, abzieht.

In jeder geom. Propt. ist das Prod. der äußern Gl. gl. dem Prod. der mittlern. Hat man daher die Ausdrücke von drei Gl., so hat man auch den Ausdruck von dem äußern unbekannten, oder von dem mittlern unbekannten, indem man das Prod. der mittlern durch das bekannte äußere Gl. dividirt, oder das Prod. der äußern durch das bekannte mittlere dividirt.

In den ähnl. Tr. sind die hom. S. propt. Die Aehnlichkeit der Tr. wird besonders durch die Gleichheit der W. erkannt. Die Sätze von der Aehnlichk. der Tr. muß man also ganz geläufig inne haben.

Im rechtw. Tr. ist das Qdr. der Hypot. gl. der Summe der Qdr. der beiden andern S.

Der Inhalt eines bel. Tr. ist gl. dem halben Prod. aus Grdl. und Höhe.

In jedem grdl. Tr. verh. sich die S., wie die Sinus ihrer Gegenwinkel ꝛc.

Diese allgem. Lehrs. und ähnl. andere sind die Basis von den Gleichungen, welche die Rel. von den Elementen einer geom. Aufg. enthalten; und diese Gleichungen selbst

werden die Quelle von vielen andern Lehrs., welche der Kalkül ganz allein giebt, weil man es alsdann nur noch mit bloßen algebr. Größen zu thun hat.

§ 55. Um die so eben angezeigten allgem. Lehrs. anwenden zu können, ist man oft gezwungen, die gegebenen Grß. durch die Bedingungen einer Aufg. mit andern, die davon abhängen, zu verbinden, und die in der Figur, die man, um die ersten darzustellen, gemacht hat, nicht vorhanden sind. Alsdann muß man in der Fig. neue L. ziehen, welche sich mit den schon gezogenen durch bekannte Beziehungen verketten. Bald verl. man gewisse L., entweder unbestimmt, oder bis sie andere treffen, oder bis sie von einer gegebenen Länge werden; bald zieht man durch merkwürdige P. Prllen. oder Perpd. zu andern L.; bald verbindet man merkw. P.; zuweilen zeichnet man eine neue Fig., um mittelst gewisser Lehrs., die man zu diesem Gebrauch geeignet glaubt, bequemer die Elem. der Frage mit einander verbinden zu können.

Wenn also zwei sich nicht schneidende L. mit einer dritten gegebene W. machen, so kann man sie verl., bis sie einen Tr. bilden, von welchem die W. und folgl. auch die Verh. der S gegeben sind.

Wenn ein W. gegeben ist, oder daß er einem andern bekannten W. gl. sei, so kann man einen der Gattung nach gegebenen Tr., oder ähnl. einem andern bilden.

Hat man einen spitzw. oder stumpfw. Tr., so kann man durch Fällung eines Perpd. von einer seiner Winkelsp. auf die Gegenseite, oder auf deren Verlängerung zwei rechtw. Tr. bilden.

Betrifft es Fig. von mehr als drei S., so kann man sie durch Diagon. in Tr. zerlegen.

§ 56. Nachdem man die Ordnung und die Methode

gewählt hat, wodurch man auf das Einfachste die Aufl. einer Aufg. geben zu können glaubt, und diesem gemäß die Fig. gezeichnet hat, welche die Elemente des Kalküls liefern soll, so muß man den versch. L., welche die Figur enthält, Namen geben (sie benennen, bezeichnen). Nachgehends verb. man die bekannten Grß. mit denen, die es nicht sind, und bemüht sich, Gleichungen zu bilden, es sei nun, daß man zwei versch. Werthe von einerlei unbekannten habe, die einen besondern Namen besitzen, oder es geschehe dadurch, daß man zwei Werthe von einerlei Grß. sucht, die keinen Namen haben, die aber von denen, die einen haben, sich ableiten.

§ 57. Es erfordert öfters Geschicklichkeit, die mit einander zu verbindenden Grß. auf obige Art schicklich zu verbinden. Dieses wird man in der Folge besser durch Beisp. als durch Vorschriften erlernen. Ich begnüge mich für jetzt, zu bemerken, daß es nicht nöthig ist, Grß. zu benennen, deren Werth sich aus den schon benannten ableiten läßt. Z. B., hat man eine in zwei Theile getheilte L. und einen ihrer Theile benannt, so hat man keinen neuen Buchst. nöthig, um den andern Theil zu bezeichnen, weil er sich durch eine bloße Subtr. ergiebt; eben so, wenn man die beiden Katheten eines rechtw. Tr. benannt hat, so hat die Hypot. sogleich einen Namen, weil sie gl. der Quadratwurzel aus der Summe der Qdr. der beiden Katheten ist 2c. Aber öfters, um den Kalkül zu erleichtern und zu vereinfachen, stellt man durch einen besondern Buchst. eine Grß. vor, die man aus den andern unmittelbar ableiten könnte, und eliminirt diesen Buchst. nicht eher, als nachdem man alle Gleichungen, welche die Bedingungen der Aufg. ausdrücken, gebildet hat.

§ 58. Mit den geom. Aufg. verh. es sich wie mit den rein Algebraischen.

Findet sich in der Endgleichung nur eine unbekannte Grß., so ist die Aufg. bestimmt; und ist vom ersten, vom zweiten, vom dritten Grade rc, je nachdem die Endgleichung vom ersten, oder vom zweiten, oder vom dritten Grade ist rc. Enthält die Endgleichung mehr denn eine unbekannte, so ist die Aufg. unbestimmt, und ist von demselben Grade, wie diese Gleichung.

§ 59. Ist man zu der Endgleichung einer Aufg. gekommen, so sucht man in der schon gezeichneten Fig. oder in einer ausdrücklich zu diesem Behuf neu gezeichneten Fig. den geom. Ausdruck einer oder mehrerer unbekannten Größen. Diese Operation heißt die Construction der Gleichung. Die bestimmten Gleich. vom ersten und zweiten Grade lassen sich, wie man weiter unten sehen wird, nach Prinzipien constr., die man aus den Elementen der Geom zieht. Die bestimmten Gleich. von höherem Grade, als der zweite, und die unbestimmten Gleich. hangen, ihre Constr betreffend, von der Theorie der Curven ab.

Wir gehen zur Anwendung über.

---

# Drittes Kapitel.

## Auflösung von mehreren bestimmten Aufgaben des ersten und zweiten Grades.

---

§ 60. Aufg. Ueber der einen Seite AB = a eines gegebenen Tr. ABC ein Rechteck zu zeichnen, welches dem Quadrat der S. AC = b gleich ist. (Fig. 7).

Aufl. Es sei AH das verl. Rect. und die gesuchte

anderee S. des Rect. sei AG = x, so ist die Gleichung $a.x = b^2$ und hieraus $x = \frac{b^2}{a}$. Es ist also x die dritte Proportionale zu a und b.

Erste Constr. Nimm AD = AC und ziehe DF ‖ BC, so ist AG = AF = x.

Zweite Constr. Ueber AB beschr. einen Halbkr., mache Sehne AI = AC und fälle auf AB den Perpd. IK, so ist AK die gesuchte zweite S. AG des Rectangels. Denn

$$AB : AI = AI : AK$$

d. h. $a : b = b : AK$

folgl. $AK = \frac{b^2}{a}$, also = x = AG.

§ 61. Aufg. Auf der Seite AB eines rechtwinkligen Tr. ABC einen solchen Punkt D zu finden, daß das Quadrat des Perpendikels DE auf AB gleich dem Rectangel BD . AD (Fig. 8.)

Aufl. Da der △BAC gegeben ist, so sind alle seine Dimensionen gegeben. Da aber der P. D unbekannt ist, so sind BD, DA auch unbekannt; und man sieht, daß die Aufg. aufgelößt sein wird, wenn man dahin gelangen kann, diese L. zu finden. Ich nenne AB, a; AC, b; die unbek. BD, x; aber DA benenne ich gar nicht, weil diese L. der Unterschied von BA, BD ist, sie ist so fort durch a — x vorgestellt.

Nun haben wir erstlich $BD . DA = x (a - x) = ax - x^2$. Ueberdem, welches auch immer die Lage des P. D sein mag, so ist klar: da DE ‖ AC angenommen, so sind die zwei Tr. BAC, BDE immer ähnl., folgl. hat man folgende Proportion:

$$BA : AC = BD : DE \text{ oder } a : b = x : DE,$$

mithin $DE = \frac{b \cdot x}{a}$; und $DE^2 = \frac{b^2 \cdot x^2}{a^2}$.

Aber, nach den Bedingungen der Aufg., muß man haben $DE^2 = BD \cdot DA$. Man hat also die Gleichung

$$\frac{b^2 \cdot x^2}{a^2} = ax - x^2.$$

Hieraus $(a^2 + b^2)\,x^2 - a^3x = o,$

folgl. $x = o$, und $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$.

Der erste Werth zeigt an, daß der P. D in den P. B fallen wird; alsdann wird das Qdr. von DE Null und kann gl. dem Rect. BD . DA gedacht werden, welches auch Null, weil der Factor BD Null ist.

Der zweite Werth von x ist eigentlich derjenige, den man sucht, und den man, wie folget, constr.

Es ist erlaubt, x als das vierte Gl. einer Prop anzusehen, deren erstes Gl. $a^2 + b^2$, das zweite $a^2$ und das dritte a, weil eine solche Propt. giebt $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$. Um nun die geom. Ausdrücke von den Gl. dieser Proport. zu haben, so erinnere ich mich der erwiesenen Eigenschaft des rechtw. Tr., und bemerke, daß wenn man aus der Sp. des rechten W. A auf der Hypot. BC den Perpd. AE, und aus E auf BA den Perpd. ED fällt, so wird man haben

$$BA^2 : BE^2 = BA : BD.$$

Nun sind die zwei rechtw. Tr. BEA, BAC, augenscheinlich ähnl. Man wird also haben

$$BA : BE = BC : BA;$$

und folgl. $BA^2 : BE^2 = BC^2 : BA^2$,

folglich $BC^2 : BA^2 = BA : BD$;

d. h. $a^2 + b^2 : a^2 = a : BD$;

folgl. $BD = x$.

Der durch die vorhergehende Constr. bestimmte P. D ist der verlangte P.

Aufl. 2. Eine genauere Erwägung der Aufg. muß sogleich ergeben, daß DE ein Perpd. auf dem Durchm. eines Halbkr., dessen Durchm. AB. Beschr. man also über AB einen Halbkr., so bestimmt sich dadurch der P. E und also auch durch den Prpd. ED der P. D.

Dritte Constr. Der Formel $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$

da $a^2 + b^2 = BC^2$,

so ist $x = \frac{a^3}{BC^2} = \frac{a^2}{BC} \cdot \frac{a}{BC}$.

Man suche nun zuerst $y = \frac{a^2}{BC}$, und dann $x = \frac{y \cdot a}{BC}$ zu constr. Nimm nun (Fig. 9) BG = BA und fälle auf BA den Perpd. GF. Dann nimm BE = BF und fälle ED perpd. auf BA, so ist D der gesuchte P.

Beweis. $BC : BA = BG : BF$,

oder $BC : a = a : BF$,

mithin $BF = \frac{a^2}{BC} = y$.

Eben so ist $BC : BA = BE : BD$,

oder $BA : a = BF : BD$;

folgl. $BD = BF \cdot \frac{a}{BC} = \frac{a^2}{BC} \cdot \frac{a}{BC} = x$.

§ 62. Aufg. Einen gegebenen Triangel ABC in ein Trapezium BF zu verwandeln, in welchem die eine der parallelen Seiten BC = a; ABC der eine, BCD der andere gegebene anliegende Winkel. (Fig. 10.)

Aufl. Ziehe AD ∥ BC, setze AD = b; den Perpd. AG = h, bezeichne EF mit y, die Höhe des Trp. aber mit x, so entstehet die Bedingungsgl.

$$\frac{y + a}{2} \cdot x = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Zieht man nun ferner CH || AB, so ist

$$DH : IF = AG : x$$

oder $b - a : y - a = h : x$, also $x = \frac{y - a}{b - a} \cdot h$

Dieser Werth von x, in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$\frac{y^2 - a^2}{2(b - a)} h = \frac{a \cdot h}{2}; \text{ hieraus } y = \sqrt{a \cdot b}.$$

Constr. Aus $y^2 = a \cdot b$ folgt

$$a : y = y : b,$$

d. h. EF ist die mittlere Proportionale zwischen BC und AD oder zwischen AH und AD. Diese mittlere Proportionale sei DK. Zieht man nun KE || DC und endlich EF || BC, so ist Trap. BF = △ABC.

§ 63. Aufg. In einen gegebenen Triangel ABC, ein Quadrat zu zeichnen. (Fig. 11).

Aufl. Man denke, es sei DEKF das gesuchte Qdr. Vom Scheitel A fälle auf BC den Perpd. AH, der die S. DF dieses Qdrs. in irgend einem P. M trift.

Setzen wir $\begin{cases} BC \ldots\ldots\ldots = a, \\ AH \ldots\ldots\ldots = h, \\ AM \ldots\ldots\ldots = x, \end{cases}$

und mithin MH oder DE oder FK ...... = h — x.

Die beiden ersten L. BC, AH, sind bekannt, weil alle Dimensionen des Tr. ABC gegeben sind; aber die anderen L. AM, DE oder MH oder KF sind unbekannt.

Da BC || DF, so hat man

$$BC : DF = AB : AD = AH : AM;$$

d. h. man vergl. das erste Verh. mit dem dritten und setze statt BC, AH, AM, ihre algebr. Werthe,

$$a : DF = h : x; \text{ und folgl. } DF = \frac{a}{h} . x.$$

Nach den Bedingungen der Aufg. muß aber sein DF = DE. Man wird also die Gleichungen $\frac{a}{h} . x = h - x$ haben;

woraus wir ziehen $x = \frac{h^2}{a + h}$.

Um diesen Werth zu constr., beschr. ich (Fig. 12) aus dem P. A mit einem Halbm. AO = AH + BC einen Kreisbg., der die verl Grdl. CB in O schneidet. Aus dem P. H fälle auf AO den Perpd. HR. Hat man nachgehends AM = AR genommen, so ziehe ich durch M die gr. L. DF prll. mit BC und aus D und F die Perpd. DE, FK auf BC. So ist alsdann DEKF das verlangte Qdr. Man hat wirklich

$$AO^2 : AH^2 = AO : AR = \frac{AH^2}{AO} = \frac{h^2}{a + h},$$

welches der Werth von x ist. Also der durch die vorhergehende Constr. bestimmte P. M ist der, durch welchen die S. DF des gesuchten Qdr. gehen muß, welches genügt, um die Constr. des Qdr. zu vollenden.

§ 64. Aufg. Von zwei in einer Ebene der Größe und Lage nach gegebenen Kreisen X, Y, eine Linie MN zu ziehen, die beide Kreise berührt. (Fig. 13, 14.)

Aufl. Man nehme an, daß die nöthigenfalls verl. Tg. NM in S, die CO trift, welche die Mittelp. der beiden gegebenen Kr. verbindet. Hat man nach den Berührungsp. M und N die Halbm. CM, ON gezogen, hat man die Perpd. MA, NB auf die Centrallinie gefällt und nehmen wir ferner

| | | |
|---|---|---|
| die bekannten Größen, | CO . . . . . . . | = a, |
| | CM . . . . . . . | = b, |
| | ON . . . . . . . | = c, |
| die unbekante | CA . . . . . . . | = x, |

so geben die ähnl. Tr. CAM, CMS, ONS die zwei folgenden Propt.

$$CA : CM = CM : CS,$$

oder $$x : b = b : CS, \text{ folgl. } CS = \frac{b^2}{x}.$$

$$CA : CM = ON : OS,$$

oder $$x : b = c : OS, \text{ folgl. } OS = \frac{b.c}{x}.$$

Nun hat man in (Fig. 13) $CS = CO + OS$, und (Fig. 14) $CO = CS + OS$, oder $CS = CO - OS$. Vereinigt man beide Fälle in einerlei Gleichung vermittelst des doppelten Zeichens $\pm$, so wird man haben $\frac{b^2}{x} = a \pm \frac{bc}{x}$; woraus man zieht $x = \frac{b\,(b \mp c)}{a}$. Dieser Werth von x wird constr., indem man zu a, b und $(b \mp c)$ eine vierte Proportionale sucht. Da man so die Lage des P. A kennt, so ergiebt sich durch den Perpd. AM auf CO der P. M. Zieht man nun den Halbm. CM und errichtet in M auf CM einen Perpd., so wird dieser die beiden Kr. berühren.

§ 65. **Aufg.** Die Halbkreise ABD, OPD berühren sich in D, und OB sei im Endpunkt O auf dem Diameter DO perpendikulär. Man soll einen Kreis KPH beschreiben, welcher die 3 Seiten BO, OPD, DHB des gemischtlinigen Triangels BOPDHB berührt. (Fig 15.)

**Aufl.** Es seien C, F, G die Mittelp. der zwei gegebenen Halbkr. und des gesuchten Halbkr. Die P. C, G und der Berührungsp. H des Kr. KPH mit dem Halbkr. ABD liegen auf einerlei gr. L. CGH; eben so liegen die P. F, G und der Berührungsp. P des Kr. KPH mit dem Halbkr. OPD, auf einerlei gr. L. FPG. Aus dem Mittelp. G ziehe GK perpd. auf OB, so ist nothw. GK ein Halbm.

und K der Berührungsp. des Kr. KPH mit der Ord. OB; aus G fälle man auch auf OD den Perpendikel GE. Nun benennen wir die

bekannten Größen $\begin{cases} CD \ldots\ldots\ldots a, \\ OF \text{ oder } FD \ldots b, \end{cases}$

unbekannte $\begin{cases} FG \ldots\ldots\ldots x, \\ FE \ldots\ldots\ldots y. \end{cases}$

Es ist sogleich klar, daß $CF = a - b$, EO oder GK oder $GH = b - y$, $CE = a - b - y$, $CG = CH - GH = a - b + y$; $GE^2 = x^2 - y^2$.

Der rechtw. Tr. CEG giebt $CG^2 = CE^2 + EG^2$, d. h. in analytischen Ausdrücken

$$(a - b + y)^2 = (a - b - y)^2 + x^2 - y^2;$$

welches sich reducirt auf

I. $4ay - 4by + y^2 = x^2$;

ferner hat man $FG = FP + PG$, d. h.

II. $x = 2b - y$, und $x^2 = 4b^2 - 4by + y^2$.

Diesen Werth von $x^2$ setze man in I., so finden wir $y = \frac{b^2}{a}$. Nachgehends setzen wir diesen Werth y in II., so haben wir $x = 2b - \frac{b^2}{a}$.

Es ist klar, daß der geom. Werth von y eine dritte Proportionale zu a und b ist, d. h. zu den beiden Halbm. CD, FD, und der Werth von x übrig bleibt, wenn man diese dritte Proport. von dem Durchm. OD abzieht. Da wir nun FE und FG kennen, so kömmt es nur noch darauf an, um die Lage des Mittelp. G zu bestimmen, in E auf OD einen unbestimmten Perpd. zu zeichnen, und aus F, mit einem Halbm. FG oder x einen Kreisbg. zu beschr.; dieser Bogen wird die EG in dem gesuchten P. G schneiden. Endlich, fälle man aus G auf OB den Perpd. GK, und

beschr. mit dem Halbm. GK den Kr. KPH, welcher die Bedingungen der Aufg. erfüllt.

§ 66. Aufg. Eine gegebene gerade Linie AB in äußere und mittlere Verhältnisse (in stetiger Verhältniß) zu theilen. (Fig. 15.)

Aufl. Angenommen, AC sei der Theil, welcher die mittlere Proportionale zwischen der ganzen L. AB und dem andern Theil CB sein soll, und nennen wir AB, a; AC, x; so ist CB = a — x.

Da nun sein soll AB : AC = AC : CB,

d. h. $a : x = x : a - x$,

so haben wir die Gleichung

$$x^2 = a^2 - ax; \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})}.$$

Die unbekannte hat also zwei Werthe, die zu construiren sind. Um den ersten Werth zu haben, errichte man in B auf AB den Perpd. BD $= \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$, und ziehe die Hypot. AD, die gleich $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Zieht man also von DA den Theil DM $= \frac{a}{2}$ ab, so wird der Rest AM der gesucht Werth sein, weil AM = AD — DM $= \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{a}{2}$. Trägt man also AM von A in C, so wird die L. AB in C wie verlangt, getheilt sein.

Der zweite Werth von x, d. h. $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})}$, wird constr., indem man bemerkt, daß, wenn man DK = DB $= \frac{a}{2}$ nimmt, man AK = AD + DK $= \sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})} + \frac{a}{2}$ haben wird, welche positiv und der gesuchten entgegengesetzt

setzt ist. Da nun die neg. Größen immer in einer den pos. Größen entgegengesetzter Richtung genommen werden sollen, so folgt hieraus, daß wenn man KA nach M′ hin verl., so daß AM′ = AK und man auf BA, nach C′ hin verl., AC′ = AM′ nimmt, so wird C′ der gesuchte P. sein. So daß man die Propt. haben wird AB : AC′ = AC′ : C′B. Denn, nimmt man die absoluten Werthe der gr. L. AB, AC′, C′B, abgesehen von ihrer Lage, die in ihren Verh. nichts sagend ist, so hat man $AB = a$, $AC' = \frac{a}{2} + \sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})}$, $C'B = a + \frac{a}{2} + \sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})}$; und folgl. $AB \cdot C'B = AC'^2$, wie man sich davon überzeugen kann, wenn man für die L. ihre analytischen Werthe setzt und die angezeigten Multiplikationen ausführt.

§ 67. Anmerk. Eigentlich löst nur der P. C die vorgelegte Aufg.; die Algebra giebt, durch denselben Kalkül, nicht allein die Aufl. der von ihr geforderten besondern Aufg., sondern überhaupt die Aufl. von allen Fragen gleicher Natur. Z. B. in dem gegenwärtigen Fall, löst die Gleichung $x^2 = a^2 - ax$. Die algeb. Aufg., wo gefordert wird, auf einer gegebenen L. oder auf deren Verl. einen P. zu bestimmen, dessen Entf. von einem Endp. der gegebenen L. die mittlere Prop. zwischen der ganzen L. in der Entf. des in Rede stehenden P. von dem andern Endp. der gegebenen L.; eine Aufg., von welcher die oben gegebene nur ein besonderer Fall ist, weil man dort annimmt, daß der gesuchte P. in der Linie selbst liegen soll.

§ 68. **Aufg.** Einen rechtwinkligen Triangel zu zeichnen, in welchem die eine Kathete die mittlere Proportionale ist zwischen der andern und der gegebenen Hypotenuse = a.

**Aufl.** Die Katheten seien x und y,

so ist $y^2 = a^2 - x^2$

und $y^2 = a \cdot x$,

also $x^2 + ax = a^2$,

folglich $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + a^2)}$,

die Const. wie in § 66.

§ 69. Aufg. Einen gegebenen Triangel in ein Rectangel zu verwandeln, dessen Umfang einer gegebenen Linie $= 4a$ gleich wird.

Aufg. Da der Tr. gegeben ist, so sei die eine S. $= b$, und die dazu gehörige Höhe $= 2h$, die zu bestimmenden S. des Rect. $= x, y$, so haben wir nach den Bedingungen 1) $x + y = 2a$,

2) $xy = b \cdot h$

$$(x + y)^2 - 4xy = 4a^2 - 4bh$$

$$(x - y)^2 = 4a^2 - 4bh,$$

3) $x - y = 2\sqrt{(a^2 - bh)}$

Aus 2) und 3) $x = a + \sqrt{(a^2 - bh)}$

$$y = -\sqrt{(a^2 - bh)} + a$$

Constr. (Fig. 16) Der gegebene Tr. sei ABC, AD = h dessen Höhe; Nimm BE $= \frac{1}{2}h$, beschr. über EC einen Halbkreis, errichte BF perpd. auf EC, nimm FG $= a$, und beschr. aus G mit GF den Halbkr. HFK, so ist $x =$ BK und $y =$ BH; nimmt man BN = BH und perpd. auf BK, so ist das vollendete Rect. BM, das verlangte.

§ 70. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen innerhalb eines Winkels ABC gegebenen Punkt D gehet und zugleich die Schenkel dieses gegebenen Winkels berührt. (Fig. 17.)

Aufl. Da die Schenkel den Kr. berühren sollen, so muß der Mittelp. des gesuchten Kr. in der Berührungsl. BN des W. liegen. Setzt man, E sei der gesuchte Mittelp. und zieht durch D den Perpd. auf BN, nimmt EF

prpd. auf AB, setzt BH = a, BG = b, GD = h, BF = x, BE = y; so hat man

$$EF^2 = y^2 - x^2 \text{ und}$$
$$ED^2 = (b - y)^2 + h^2;$$

da nun EF und ED Halbm. eines Kr. sind,

so ist $y^2 - x^2 = (b - y)^2 + h^2$;

also $x^2 - 2by = -b^2 - h^2$ (I.)

Nun ist aber auch BE : BF = BH : BG

d. h. $y : x = a : b$, also $y = \frac{a}{b} \cdot x$ (II.)

Diesen Werth von y in I. gesetzt, giebt

$$x^2 - 2ax = -b^2 - h^2,$$
$$x = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2 - h^2)},$$

x hat also zwei Werthe.

Constr. Es ist $HG^2 = a^2 - b^2$. Beschr. man also einen Halbkr. über HG und nimmt GI = GD, so ist $HI^2 = a^2 - b - h^2$. Beschr. man also auf H über AB einen Halbkr., so ist F der Berührp. für den einen, K der für den andern der ebenfalls der Bedingung entsprechenden Kr.

Andere Aufl. Einfacher ist es, wenn man HG = d und DG = h als gegeben betrachtet und HF = z sucht. Wir haben nämlich alsdann

$$z^2 + FE^2 = d^2 + EG^2 \text{ (beide gl. } HE^2\text{)},$$

oder $z^2 + FE^2 = d^2 + ED^2 - h^2$.

Da nun EF = ED sein soll,

so muß $z^2 = d^2 - h^2$ sein,

es ist also $HF = \sqrt{(d^2 - h^2)}$.

§ 71. Aufg. Es sind zwei gerade Linien a, b gegeben; man soll eine dritte x zeichnen, so daß sich $b : x = x : a + x$ verhält. (Fig. 18.)

Aufl. Aus der Bedingung folgt

$$x^2 - bx = ab,$$

folglich $$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b^2}{4} + ab)}.$$

Von den beiden Werthen ist hier nur der positive für unsere Aufg. gültig.

Constr. Man suche $a : y = y : b$,

so ist $$y^2 = ab,$$

also $$x = \frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{4} + y^2)}.$$

Nunmehr zeichne man einen rechtw. Tr., dessen Katheten $\frac{b}{2}$, $y$, so ist $\sqrt{(\frac{b^2}{4} + y^2)}$ die Hypt., die, zu $\frac{1}{2}b$ gesetzt, $x$ giebt.

Ist also in (Fig. 18) $AB = a$, $AC = b$, so beschr. man über BC einen Halbkr., errichte den Perpd. AD, halbire AC in E, ziehe ED und mache $EF = ED$, so ist $AF = x$ und es verh. sich

$$AC : AF = AF : BF,$$

d. h. $$b : x = x : a + x.$$

Synthetischer Bew. $AD^2 = ED^2 - EA^2 = EF^2 - EA^2 = (EF + EA)(EF - EC)$, weil $EA = EC$,

oder $$AD^2 = AF . CF \text{ und auch}$$

$$AD^2 = AC . AB; \text{ also}$$

$$AC . AB = AF . CF; \text{ folglich}$$

$$AC : CF = AF : AB; \text{ daher auch}$$

$$AC : AC + CF = AF : AF + AB \text{ oder}$$

$$AC : AF = AF : BF,$$

woraus auch $AF^2 = AC . BF$ folgt.

§ 72. Aufg. Es ist gegeben ein Durchmesser $AB = a$. Man soll von dem Endpunkt A des Durchmessers nach der Tangente BD im andern Endpunkte des Durchmessers eine gerade Linie AD ziehen, so daß das Stück dieser Linie ED zwischen der Tangente und dem Kreise einer gegebenen Linie b gleich ist. (Fig. 19.)

Aufl. Es sei $AD = x$,
so ist $DB^2 = DA^2 - AB^2 = x^2 - a^2$.
Da nun nach geom. Lehren $BD^2 = DE \cdot AD$ (△DEB ~ △ABD)
oder $BD^2 = b \cdot x$,
so giebt dieses die Gleichung

$$x^2 - a^2 = bx,$$
$$x^2 - bx = a^2,$$
$$x = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + a^2)},$$

wo der negative Werth $x = \tfrac{1}{2}b - \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + a^2)}$.

Constr. Nimm $BF = b$, halbire BF in C, ziehe AC und verl. sie, so daß die Verl. $CG = \tfrac{1}{2}b$ werde; beschr. aus A mit AG einen Kr., welcher von der Tang. das Stück BD abschneidet, so ist die gr. L. AD die verlangte Linie.

Beweis. $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)}$;
folgl. ist $AG = CG + AC = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + a^2)} = x$.
Da nun $AD = AG$, so ist auch $AD = x$.

§ 73. Aufg. Ein Quadrat zu zeichnen, von welchem der Unterschied a zwischen der Diagonale und der Seite gegeben ist. (Fig. 20.)

Aufl. Es sei die S. des Qdrs. x, so ist $x + a$ die Diag., daher die Bedingungsgleichung

$$x^2 + x^2 = 2x^2 = (x + a)^2,$$
$$x\sqrt{2} = x + a,$$
$$x(\sqrt{2} - 1) = a,$$
$$x = \frac{a}{\sqrt{2} - 1} = a \cdot (\sqrt{2} + 1) = 2{,}4142136 \cdot a.$$

Für die arithm. Berechnung ist diese Formel die bequemste; um aber x durch eine geom. Constr. zu finden, gebe ich der Formel folgende Gestalt:

$$x = \sqrt{2a^2} + a.$$

Constr. Zeichne einen gleichsch. rechtw. Tr. ABC, in welchem jede Kathete $AB = BC = a$, so ist $AC = \sqrt{2a^2}$. Verl. man AC und macht deren Verl. $CD = CB = a$, so

ist AD $= \sqrt{2a^2} + a = x$. Ein Perpd. in D auf AD schneidet die verl. AB in E und bestimmt dadurch die Diagonale AE.

§ 74. Aufg. Eine gegebene Linie AB $= a$ in C so in zwei Theile zu theilen, daß das Rectangel aus diesen beiden Theilen gleich einem gegebenen Quadrat, dessen Seite b ist. (Fig 21.)

Aufl. Es sei AC $= x$, CB $= y$, so haben wir folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x + y = a \\ 2)\quad\ \ xy = b^2 \end{array}\right\}$$; diesen Gleichungen entspricht folgende Construction:

Nimm AB $= a$ und beschr. darüber einen Halbkreis. Errichte im Endp. B auf AB den Perpd. BD $= b$, und ziehe durch D mit AB eine Prlle. Aus dem Durchschnittsp. E dieser Prlle. mit dem Umfange des Halbkr. fälle auf den Durchm. AB den Perpd. EC, so ist

$$AC : CE = CE : CB,$$

d. h. $x : b = b : y$,

folgl. $x . y = b^2$

und $x + y = AB = a$.

Wir sehen hier, daß die Gleichungen constr. worden, ohne daß es nöthig war, sie vorher aufzulösen.

Lösen wir aber die Gleichungen auf, so ergiebt sich

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)},$$

woraus folgende Constr. abgeleitet wird:

Zeichne einen rechtw. Tr., in welchem b eine Kathete und $\frac{a}{2}$ die Hypot., so ist $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$, die andere Kathete — diese zu $\frac{a}{2}$ addirt oder davon weggenommen, giebt x und y.

§ 75. Aufg. Eine gegebene gerade Linie AB = a um ein Stück zu verlängern, so daß das Rectangel aus der gegebenen Linie in dem angesetzten Stücke gleich einem gegebenen Quadrate dessen Seite = c. (Fig. 22.)

Aufl. Das gesuchte Stück sei x, so haben wir

$$a \cdot x = c^2 \text{ also } x = \frac{c^2}{a}.$$

Constr. Zeichne einen rechtw. Tr. ABC, in welchem AB = a und BC = c. Errichte in C auf AC den Perpd. CD, dieser trift die verl. AB in D und wir haben a : c = c : BD, folgl. ist BD das gesuchte Stück x.

§ 76. Aufg. Von einem rechtwinkligen Triangel ist bekannt eine Kathete gleich a, und das Rectangel aus diesen Seiten = $c^2$. Man soll diese Seiten finden. (Fig. 23.)

Aufl. Es sei ABC der verlangte rechtw. Tr. AB = a; AC = x und BC = y, so sind die Bedingungsgleichungen

1) $$x^2 - y^2 = a^2;$$

2) $$x \cdot y = c^2,$$

$$x^2 = a^2 + y^2;$$

also
$$y^2 (a^2 + y^2) = c^4,$$

$$y^4 + a^2 y^2 = c^4,$$

$$y^2 = -\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{(c^4 + \frac{a^4}{4})},$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{(c^4 + \frac{a^4}{4})},$$

um hieraus eine elegante Constr. abzuleiten, so gestalte man die Formel so:

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \pm a \sqrt{(\frac{c^4}{a^2} + \frac{a^2}{4})}.$$

Nun suche man $z = \frac{c^2}{a}$, dann ist, $z^2 = \frac{c^4}{a^2}$,

daher $$x = \sqrt{\left[\frac{a}{2} \pm \sqrt{(z^2 + \frac{a^2}{4})}\right] a}.$$

Dieses giebt folgende Constr. (Fig. 24):

Nimm AB = a. Errichte in B den Perpd. BD gleich $z = \frac{c^2}{a}$. Halbire AB in G und beschr. aus G mit GD einen Halbkr., dieser schneidet die verl. AB in E und F. Nun beschreibe über AF einen zweiten Halbkreis und verl. den Perpd. DB bis zur Peripherie dieses zweiten Halbkr. in C, so ist ABC der verl. rechtw. Triangel.

Bew. Es ist $GD = \sqrt{(z^2 + \frac{a^2}{4})} = GE = GF$,

also $$BE = \frac{a}{2} + \sqrt{(z^2 + \frac{a^2}{4})} = AF,$$

und $$BF = GF - GB$$
$$= \sqrt{(z^2 + \frac{a^2}{4})} - \frac{a}{2}.$$

Nun ist $AB : AC = AC : AF$,

also $AC^2 = AB \,.\, AF$.

Mithin $$AC = \sqrt{a \,.\left[\frac{a}{2} + \sqrt{(z^2 + \frac{a^2}{4})}\right]},$$

und da dieses der eben gefundene Werth von x ist, so muß AC = x sein.

Eben so ist auch

$AB : BC = BC : BF$,

also $BC^2 = AB \,.\, BF$.

Mithin $$BC = \sqrt{a\left[\sqrt{(z^2 + \frac{a^2}{4})} - \frac{a}{2}\right]} = y;$$

der negative Werth findet hier nicht Statt.

Anmerk. Diese Aufgabe ist die 18te in Vieta Opera mathematica pag. 257.

§ 77. Aufg. In einem rechtwinkligen Triangel ABC ist gegeben die Hypotenuse AC = a und der Inhalt des Triangels $\frac{1}{2}c^2$. Man soll die Katheten dieses Triangels finden. (Fig. 25.)

Aufl. Es sei ABC der gesuchte Tr. AC = a; AB = x und BC = y, so ist $y^2 = a^2 - x^2$,

und da $x^2y^2 = c^4$, statt $y^2$ den Werth $a^2-x^2$

so ist auch $x^2(a^2 - x^2) = c^4$,

$a^2x^2 - x^4 = c^4$,

woraus $$x = \sqrt{\left[\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\left(c^4 + \frac{a^2}{4}\right)}\right]}.$$

Hieraus würde eine Constr. wie in § 76 abzuleiten sein; ich überlasse dieses zur eigenen Uebung und bemerke nur, daß der negative Wurzelwerth von $\sqrt{\left(c^4 + \frac{a^4}{4}\right)}$ für x einen unmöglichen Werth giebt und daher nicht Statt finden kann.

Zweite Aufl. Da $x^2 + y^2 = a^2$,

und $xy = c^2$,

so ist $(x \pm y)^2 = a^2 \pm 2c^2$,

folgl. $x \pm y = \sqrt{(a^2 \pm 2c^2)}$;

demnach $$x = \frac{\sqrt{(a^2 + 2c^2)} + \sqrt{(a^2 - 2c^2)}}{2}$$

und $$y = \frac{\sqrt{(a^2 + 2c^2)} - \sqrt{(a^2 - 2c^2)}}{2}.$$

Hieraus eine Constr. abzuleiten, überlasse ich ebenfalls der eigenen Uebung, und will lieber hier noch eine dritte Aufl. geben.

Dritte Aufl. (Fig. 25) der Perpd. BD sei z,

so ist $a : y = x : z,$

und auch $y : c = c : x.$ (aus $xy = c^2$);

demnach $a : c = c : z$

Hieraus ergiebt sich folgende Constr. (Fig. 26.),

Beschr. über AC = a einen Halbkr. Errichte in C auf CB den Perpd CF = c und nimm

$$CE = CG = z = \frac{c^2}{a}.$$

Ziehe EB || CA und lasse aus dem Durchschnittsp. B den Perpd. BD auf CA fallen, so ist ABC der verlangte Tr.

Beweis. $AC : CF = CF : CG$

oder $a : c = c : z.$

Anmerk. Dieses ist die 20ste Aufgabe in Vieta Opera Mathematica pag. 339.

§ 78. Aufg. In einem rechtwinkligen Triangel ABC ist die Kathete AC = a, und die Summe der beiden anderen Seiten = b gegeben, man soll den Triangel zeichnen. (Fig. 27.)

Aufl. Die gesuchte Hypot. AB sei = x und die Kathete BC = y, so ist

1) $x + y = b,$

2) $x^2 - y^2 = a^2,$ $(x+y)(x-y) = a^2$

hieraus 3) $x - y = \frac{a^2}{b}.$ $b(x-y) = a^2$

Eine weitere Aufl. ist nicht nöthig, um folgende geom. Constr. abzuleiten.

Zeichne einen rechtw. Tr. ACD, in welchem die Kathete AC = a und die Kathete CD = b. In A errichte auf AD einen Perpd. AE, welcher die verl. DC in E trift, so

CD : CA = CA : CE

ist $CE = \frac{a^2}{b} = x - y$. Halbirt man nun DE in B, so ist, wenn man BA zieht, ABC der verlangte Tr.

Bew. DC ist die Summe und CE die Differenz von x und y, also ist $DB = BE$ die halbe Summe + die halbe Differenz $= x$ und $BC = BE - CE = x - (x - y) = y$. Da nun $AB^2 = a^2 + y^2$ und $x^2 = a^2 + y^2$, so ist auch $AB = x$.

Zweite Aufl. Aus der Gleichung 1. und 3. ergiebt sich $x = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} = \frac{b^2 + a^2}{2b}$; und $y = \frac{b^2 - a^2}{2b}$.

Hieraus ergiebt sich folgende Constr.

Zeichne einen rechtw. Tr. ACD wie bei der ersten Aufl. Halbire AD in F und errichte daselbst einen Perpd. FB, welcher die CD in B trift — ziehe AB, so ist ABC der verlangte Tr.

Beweis. $\triangle ACD \backsim \triangle BDF$,

also $CD : DA = DF : DB$,

also $$DB = \frac{DA \,.\, DF}{CD} = \frac{DA \,.\, \frac{1}{2}DA}{CD} = \frac{DA^2}{2CD} = \frac{b^2 + a^2}{2b} = x,$$

$$CB = CD - CB = b - \frac{b^2 + a^2}{2b} = \frac{b^2 - a^2}{2b} = y.$$

Zur eigenen Uebung sei in einem rechtw. Tr. eine Kathete und die Differenz der beiden andern Seiten gegeben.

§ 79. Aufg. In einem rechtwinkligen Triangel ABC ist die Hypotenuse $AB = b$ und die Summe der Katheten $AC + CB = a$ gegeben. Man soll den Triangel zeichnen. (Fig. 28.)

Aufl. Es sei $AC = x$ und $BC = y$, so haben wir folgende zwei Bedingungsgleichungen:

1) $x + y = a$,

1) $x^2 + y^2 = b^2$.

Hieraus $2(x^2+y^2)-(x+y)^2 = 2b^2-a^2$,

d. h. $(x-y)^2 = 2b^2-a^2$,

also 5) $x-y = \sqrt{(2b^2-a^2)}$.

Aus (1. und 2.) $x = \frac{a+\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}$,

und $y = \frac{a-\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}$.

Constr. Zeichne einen gleichsch. rechtw. Tr. DAE, in welchem jede Kathete $= a$. Aus A beschr. mit $AB = b$ einem Kr. Aus dem Durchschnittsp. B fälle den Perpd. BC auf AD, so ist ABC der verlangte Tr.

Bew. $\triangle BCD \backsim \triangle EAD$, mithin $BC = CD$, daher $DC + CA = BC + CA = a$, oder $x + y = a$.

Bestimmung. b muß zwar kleiner als a sein, aber doch b nicht kleiner als $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Im letztern Falle ist $2b^2 = a^2$; und folgl. $x = y = \frac{a}{2}$, der Tr. wäre alsdann ein gleichsch. rechtwinkliger Tr.

Uebungsaufgabe. Einen rechtw. Tr. zu zeichnen, in welchem die Hypot. und die Differenz der Katheten gegeben ist.

Anmerk. Die Richtigkeit der Constr. kann algebraisch auch so nachgewiesen werden. Der Perpd AF auf $DE = z$ giebt

$$AF^2 = z^2 = \frac{a^2}{2}; \; FB^2 = u^2 = b^2 - z^2,$$

also $$BE = v = z - u = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{(b^2 - \tfrac{a^2}{2})}$$

$$= [a - \sqrt{(b^2 - a^2)}]\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

folglich $$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}v^2} = v \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{a-\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2},$$

demnach $$x = a - y = a - \frac{a-\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2} = \frac{a+\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}.$$

§ 80. **Aufg.** Einen Triangel ABC in zwei Theile ADE, DBCE durch eine gerade Linie DE parallel mit der Grundlinie CB zu theilen, die unter sich in einem gegebenen Verhältniß stehen. (Fig. 29.)

**Aufl.** Aus der Spitze A sei auf die Grundl. BC der Perpd. AH gefällt, der DE in K schneidet.

Angenommen es sei
- BC . . . . . . . . . . . . . . $= a$,
- AH . . . . . . . . . . . . . $= h$,
- das gegebene Verh. des Tr. ADE zu dem Trp. DC, d. h. $\frac{\triangle ADE}{\text{Trp. } DC}$ . . . . . . . . . . $= \frac{m}{n}$,

die unbekannte AK . . . . . . . . . . . . $= x$.

Da die Schnittslinie DE ∥ BC, so hat man

$$AH : BC = AK : DF,$$

oder
$$h : a = x : \frac{ax}{h}.$$

Also der Inhalt des Tr. ADE $= \frac{ax^2}{2h}$ und der Inhalt des Trap. DC $= \triangle ABC - \triangle ADE = \frac{ah}{2} - \frac{ax^2}{2h}$. Laut der Bedingung der Aufg. muß man haben $\frac{\triangle ADE}{\text{Trp. } DC} = \frac{m}{n}$.

Wir haben also die Gleichung $\frac{ax^2}{ah^2 - ax^2} = \frac{m}{n}$;

woraus
$$x = \pm h \sqrt{\frac{m+n}{m}}, \quad x = \pm h \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

die unbekannte hat also zwei Werthe; beide Werthe sind aber gl. und nur durch das Zeichen verschieden. Der erste, der pos. ist, gehört zu dem Tr. ABC; der zweite Werth, der neg. ist, bezieht sich auf den Tr. A′B′C′, der dem ihm gl. △ABC an der Spitze entgegengesetzt liegt.

Die Constr., die wir jetzt für den pos. Werth geben werden, findet auch für den zweiten Statt, wenn man beobachtet, daß die Linien des zweiten Tr., die den L. des ersten correspondiren, mit denselben über gestrichelten Buchstaben bezeichnet sind.

Ueber die Höhe AH, als Durchm., beschr. einen Halbkr. AFH. Theile AH in zwei Theile AZ, ZH, die in dem Verh. wie m zu n stehen, und aus Z ziehe die Ord. ZF; nimm AK = AF; so ist K der gesuchte P. Zieht man also durch diesen P. DE || BC, so werden die Tr. ADE und das Trp. DC unter sich in dem Verh. von m zu n stehen.

§ 81. Aufg. In einem rechtwinkligen △ABC kennt man die Hypotenuse BC; die Summe AB + AC der beiden Katheten, und der Höhe AD. Diesen Triangel zu bestimmen, d. h. seine unbekannten S. und Winkel. (Fig. 30)

Aufl. Angenommen es sei
BC . . . . . . . . . . = a,
AB + AC + AD . . = b,
AD . . . . . . . . . . = x,
AB . . . . . . . . . . = y,
und folgl. AC = b — x — y.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, d. h. $a^2 = y^2 + (b-x-y)^2$, oder auch

I. $a^2 = 2y^2 + b^2 - 2bx + x^2 - 2by + 2xy$.

Ferner wegen der Aehnlichkeit der Tr. ABC, BDA hat man

$$BC : BA = AC : AD,$$

oder $a : y = (b-x-y) : x$. Woraus man zieht

II. $2ax = 2by - 2xy - 2y^2$.

Addirt man die zwei Gl. I. und II., so hat man nach gehöriger Reduction

$$x = a + b \pm \sqrt{(2a^2 + 2ab)}.$$

Von den beiden Werthen von x, kann nur der zweite Werth, d. h. $x = a + b - \sqrt{(2a^2 + 2ab)} = a + b - \sqrt{[2a(a+b)]}$

der gegebenen Aufg. Genüge leisten; denn es ist einleuchtend, daß die Höhe AD des Tr. BAC kl. als $a + b$ sein muß; und um diesen Werth zu haben, darf man nur von der Summe $a + b$ eine mittlere Proportionale zwischen $2a$ und $a + b$ abziehen, hat man nachgehends über BC als Durchm. einen Halbkr. beschr. und in B den Perpd. BN = dem so eben gefundenen Werth von $x$ errichtet, so ziehet man NA || BC. Den dadurch erhaltenen Durchschnittsp. A verbinde man mit B und C, so ist ABC der gesuchte Tr.

§ 82. Anmerk. Die vorstehende Aufg. ist nur ein besonderer Fall von dieser allgemeinen. Wenn zwei gr. L. BC = a, BM = b gegeben sind (Fig. 31) eine L. x finden, so daß der Unterschied der Qdr. der beiden L. a und b gl. sei der Differenz zwischen dem Produkte der doppelten unbekannten und dem Qdr. dieser unbekannten; denn die algebr. Uebersetzung dieser Aufg. ist die Gleichung

$$b^2 - a^2 = (a + b) \cdot 2x - x^2.$$

Woraus man dasselbe Resultat wie oben zieht,

$$x = a + b \pm \sqrt{[2a^2 + 2ab]}.$$

Es giebt aber auf der L. BM zwei P. N' und N, welche dieser Gleichung Genüge leisten. Denn nehmen wir z. B. BC = 2 Fuß, BM = 7 Fuß, so hat man das obere Wurzelzeichen genommen, BN' = 15 Fuß, und nimmt man das untere Wurzelzeichen, BN = 3 Fuß. Beide Werthe genügen der Gleichung, weil man $49 - 4 = (7 + 2) \cdot 30 - 225$, und $49 - 4 = (7 + 2) \cdot 6 - 9$ hat. Aber von diesen zwei Werthen kann nur der zweite Werth BN die vorherstehende Aufg. lösen, weil, nach den Bedingungen dieser Aufg., die gegebenen Linien im Raume eine besondere Lage haben sollen, und zwar solche, daß ein rechtw. Tr. daraus entsteht, dessen Höhe BN oder AD, nothwendig kl. als die Hypot. BC sein muß, und um so mehr kl. als die Größe BC + BM.

Man sieht hieraus, daß, wenn man bis zur Endgleichung

einer Aufg. gekommen ist, so muß man die durch die Natur dieser Aufg. zu ihrer Aufl. dienenden Wurzeln zu untersuchen, und die andern als unnütz zu betrachten, wenigstens in Betreff des aufgegebenen Gegenstandes. Oefters hat eine Aufg. mehrere Auflösungen, öfters nur eine einzige. Dieses erkennet man aus der Analyse ihrer Bedingungen.

§ 83. Aufg. In einem rechtwinkligen Triangel ABC kennt man die Summe der Katheren AB, AC und die Höhe AD. Hieraus diesen Triangel zu bestimmen. (Fig. 32)

Aufl. Es seien $\left\{\begin{array}{l} AD \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = a, \\ AB + AC \;.\;.\;.\;. = b, \\ AB \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = x, \\ \text{und folgl. } AC \;.\;. = b - x. \end{array}\right.$

Da $\triangle BAC$ rechtw. in A, so ist

$$BC^2 = x^2 + (b - x)^2 = 2x^2 - 2bx + b^2.$$

Anderseits ist wegen der Aehnlichkeit der Tr. BDA, BAC,

$$a : x = (b - x) : BC,$$

also $$BC = \frac{bx - x^2}{a}.$$

daher $$BC^2 = \frac{b^2x^2 - 2bx^3 + x^4}{a^2}.$$

Die beiden Werthe von $BC^2$ gl. gesetzt, und die Gl. nach x geordnet, so findet man

$$x^4 - 2bx^3 + \left.\begin{array}{r} b \\ -2a^2 \end{array}\right\} x^2 + 2a^2bx - a^2b^2 = 0.$$

Diese Gl. ist vom vierten Grade: sie kann aber zum zweiten Grade herunter gesetzt werden; denn mit einiger Aufmerksamkeit wird man gewahr, daß wenn man auf beiden S. $a^2b^2 + a^4$ zusetzt, d. h. wenn man schreibt

$$x^4 - 2bx^3 + \left.\begin{array}{r} b^3 \\ 2a^2 \end{array}\right\} x^2 + 2a^2bx + a^4 = a^2b^2 + a^4,$$

die

die erste Hälfte ist ein vollkommenes Quadrat von

$$x^2 - bx - a^2.$$

Zieht man also aus der vorhergehenden Gleichung die Qdrtw., so wird man haben

$$x^2 - bx - a^2 = \pm \sqrt{[a^2b^2 + a^4]};$$

oder auch (indem man, der Kürze wegen, die Wurzelgröße durch ac vorstellt),

$$x^2 - bx - a^2 = \pm ac;$$

woraus man zieht

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{[a^2 + \frac{b^2}{4} \pm ac]}.$$

Nun bemerke ich sogleich, daß rücksichtlich der vorgelegten Aufg. man nicht das Glied ac, welches unter dem Wurzelzeichen stehet, mit dem Zeichen + nehmen könne; denn alsdann wäre die Wurzelgrß. viel größer als $\frac{b}{2}$. Woraus folgt, daß, wenn von den beiden vor dem Wurzelzeichen stehenden Zeichen, man das Zeichen + nähme, so würde der Werth von x viel größer als b sein, welches nicht sein darf; und, wenn man das Zeichen — nähme, so würde der Werth von x negativ sein, und folgl wäre der wahre Werth von AC, welcher b — x ist, größer als b, welches auch nicht sein kann.

Wir wollen also annehmen, ac haben das Zeichen —, oder daß $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ac)}$ sei.

In diesem Falle könnte es kommen, daß die Wurzelgrß. unmöglich oder möglich wäre. Sie wird unmöglich sein, wenn

$$ac > a^2 + \tfrac{1}{4}b^2, \text{ oder } a^2b^2 + a^4 > (a^2 + \tfrac{1}{4}b^2); \text{ oder } a^2 > \frac{b^2}{8}.$$

Alsdann ist aber auch die Aufg. unmöglich.

Sie wird möglich, wenn $a^2 = \frac{b^2}{8}$, und alsdann ist $AC - CB = \frac{b}{2}$; sie wird noch möglich sein, wenn $a^2 < \frac{b^2}{8}$.

Im letzten Falle ist die Wurzelgrß. $\sqrt{[a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ac]}$ immer kl. als $\frac{b}{2}$. Denn man hat

$$\frac{b}{2} > \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ac)}, \text{ oder } \frac{b^2}{4} > a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ac,$$

oder $ac > a^2$, oder $c > a$, oder $a^2 + b^2 > a^2$.

Wenn man also in der Gl. $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ac)}$, die Wurzelgrß. mit dem Zeichen + nimmt, so wird der Werth von x pos. und größer als $\frac{b}{2}$ aber kleiner als b sein; und nimmt man die Wurzelgrß. mit dem Zeichen —, so wird der Werth von x noch pos. aber kl. als $\frac{b}{2}$ sein.

Um zu wissen, ob diese zwei Werthe von x im gegenwärtigen Falle zuläßig sind, muß man erwägen, daß, da die Hypt. eines jeden rechtw. Tr. viel grß., als jede der beiden andern S., man haben muß

$$AB > AD, \text{ oder } x > a. \text{ Nun hat man}$$

$$\frac{b}{2} \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ac)} > a, \text{ oder } \frac{b}{2} - a > \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ac)},$$

$$\text{oder } \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 > a^2 + \frac{b^2}{4} - ac, \text{ oder } - ab > - ac,$$

$$\text{oder } c > b, \text{ oder } \sqrt{(a^2 + b^2)} > b.$$

Beide Werthe von x sind also zuläßig, und jede von ihnen löst die vorgegebene Aufg. auf. Hier die Constr.

Zuerst ist die Größe c, die zum Werthe $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ hat, die Hypot. eines rechtw. Tr., dessen den rechten W.

einschließende S. a und b sind. Ist diese Hypot. gefunden, so suche eine mittlere Proportionale d zwischen a u. c. Alsdann wird die Wurzelgrß. $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - d^2)}$; und man wird den Ausdruck finden, indem man zuerst einen rechtw. Tr. zeichnet, dessen den rechten W. einschließende S. a und $\frac{b}{2}$ seien, und einen zweiten rechtw. Tr., der mit dem vorhergehenden einerlei Hypot. und d als eine seiner Katheten hat; die andere Kathete, die ich f nenne, wird der Werth der Wurzelgrß.; folglich $x = \frac{b}{2} \pm f$.

Dieses vorausgesetzt, nachdem (Fig. 33) man die zwei L. AB, AC perpd. auf einander gestellt hat, nimmt man auf der ersten $AO = \frac{b}{2}$, und auf beiden Seiten des P. O OB, OB′ gl. f, welches $AB = \frac{1}{2}b - f$, $AB' = \frac{1}{2}b + f$ giebt. Ueber AB und AB′ als Durchm. beschr. ich die beiden Kr. AMBD, AM′B′D′, und aus dem P. A als Mittelp. mit dem Halbm. AD = a einen Kreisbg., der die beiden oben genannten Kr. in D und D′ schneidet; durch B und D und durch B′ und D′ ziehe ich die L. BDC, B′D′C′. Die zwei rechtw. Tr. BAC, B′AC′, die jeder die L. a zur Höhe haben, genügen beide der vorgelegten Aufg.

Zweite Aufl. a und b behalten ihre Bedeutung, wie vorhin (Fig. 32), aber anstatt, wie in der vorhergehenden Aufl., die S. AB zu suchen, wollen wir die Hypot. BC suchen.

Nennen wir AB, x; BC, y; und suchen wir wie oben zwei Werthe von $BC^2$, so gelangen wir zu den zwei Gleichungen

I. $y^2 = 2x^2 - 2bx + b^2$, △ABC ∼ △ABD, daher AD : AB = AC : BC

II. $y = \frac{bx - x^2}{a}$, oder $2ay = 2bx - 2x^2$,

welche addirt geben $y^2 + 2ay = b^2$; woraus man ziehet $y = -a \pm \sqrt{(b^2 + a^2)}$.

In diesem Ausdruck kann nur das obere Wurzelzeichen gebraucht werden; denn nähme man das untere Zeichen, so daß man $y = -[a + \sqrt{(b^2 + a^2)}]$ hätte, so wäre die Hypot. eine neg. L. größer denn b, welches unmöglich ist. Die Construction von y ist ganz einfach; denn zeichnet man einen rechtw. Tr., der a und b zu Katheten hat, und dessen Hypot. g genannt wird, so hat man

$$y = g - a.$$

§ 84. Anmerk. 1. Aus beiden Aufl. sieht man, daß alle Wurzeln der Endgleich., selbst die reellen, in der vorgegebenen Aufg. nicht gebraucht werden können. Man muß, in Beziehung auf diese Gleichung, in ihrer ganzen Allgemeinheit genommen, eben so schließen, wie dieses § 82 in Hinsicht einer ähnl. Gleichung geschehen ist.

§ 85. Anmerk. 2. Nach der ersten Aufl. giebt es zwei Tr. BAC, B'AC' (Fig. 33), welche der gegebenen Aufg. genügen, während nach der zweiten Aufl. die Hypot. nur einen Werth hat, wonach sich nur ein Tr. zu ergeben scheint. Um aber diesen scheinbaren Widerspruch zu heben, muß man nicht übersehen, daß die beiden Tr. BAC, B'AC' aus der ersten Aufl. sich decken und also gl. Hypotenusen haben. Denn nimmt man $AB = \frac{1}{2}b - f$, so hat man $AC = b - AB = \frac{1}{2}b + f$; und nimmt man $AB' = \frac{1}{2}b + f$, so hat man $AC' = b - AB' = \frac{1}{2}b - f$. Woraus folgt, daß die beiden Tr. BAC, B'AC' einen zwischen gl. Seiten liegenden W. A haben und folgl. congruent sind.

§ 86. Aufg. Durch die Winkelspitze A eines gegebenen Quadrats ABCD eine gerade Linie AF zu ziehen, so daß, wenn man die Seite DC verl., der Theil EF gleich einer gegebenen Linie b sei. (Fig. 34)

Aufl. Errichte in F auf AF den Perpd. FM, der die verl. AB in M trift; und FO sei perpd. auf AM. Wir

M E

wollen eine Seite des gegebenen Qdrs. AC, a; und die unbek. BM, x; FM, y, nennen.

Die beiden rechtw. Tr. FOM, ABE sind congr. Mithin AE = FM = y, und folgl. AF = AE + EF = y + b.
Ueberdem ist $AM^2 = AF^2 + FM^2$,
oder $(a + x)^2 = (y + b)^2 + y^2$, oder auch

I. $a^2 + 2ax + x^2 = 2y^2 + 2by + b^2$;

ferner geben die ähnl. Tr. ABE, AFM,

$AB : AE = AF : AM$,

oder $a : y = (y + b) : (a + x)$,

und folgl. $a^2 + ax = y^2 + by$,

oder, indem man alles mit 2 multiplicirt,

II. $2a^2 + 2ax = 2y^2 + 2by$.

Ziehen wir die Gleich. II. von der Gleich. I. ab, so hat man $x^2 - a^2 = b^2$, oder $x^2 = a^2 + b^2$,
welches $x = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$,
und folgende Constr. giebt:

Nimm (Fig. 34) eine L. BM gl. der Hypotenuse eines rechtw. Tr., dessen Katheten a und b. Ueber AM als Durchm. beschr. einen Halbkr., der DC in den P. F u. F′ schneidet, die beide der Aufg. Genüge leisten, so daß, wenn man die gr. L. AEF, AF′E′ zieht, man, EF oder E′F′ = b hat. Diese beiden L. EF, E′F′ entsprechen der pos. Wurzel $x = +\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Denn nach der vorhergehenden Construction muß AM, die den Werth AB + x, oder $a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$ hat, die Hypot. eines rechtw. Tr. sein, der die Sp. des rechten W. auf der gr. L. DCF hat; woraus folgt, daß einer von den Durchschnittsp. der DCF mit dem Umfange des Halbkr. AHM diese Sp. des Tr. sei. Also befriediget ein jeder von den beiden congr. Tr. AFM, AF′M diese Bedingung, und jede von den beiden L. EF, E′F′ ist nothwendig gl. b.

Will man die Constr. haben, die sich auf die negative Wurzel $x = -\sqrt{(a^2+b^2)}$ bezieht, so nehme man, links von B, BM′=BM; beschr. über AM′ als Durchm einen Halbkr. AH′M′; verl. CD nach Z zu; durch die Durchschnittsp. f, f′, dieser L. mit dem Umfange des Halbkr. AH′M′ und durch den P. A zieht man die durch die Verl. von CB begrenzten gr. L. fAe, f′Ae′: so werden diese L. der neg. Wurzel $x = -\sqrt{(a^2+b^2)}$ entsprechen. Denn, wenn, statt in der vorhergehenden Aufl. anzunehmen, daß die L. b, die immer durch den P. A gehen muß und durch die L. E′e′, FZ begrenzt ist, in den W. BAD falle, man annimmt, daß sie außerhalb dieses W. falle und daß sie fAe oder f′Ae′ sei, und alsdann, wenn man BM′ für die unbekannte nimmt, sich aus M, die M′f oder M′f′ perpd. auf fAe denkt, so sieht man, daß AM′, die den Werth BM′—AB oder BM—AB oder $\sqrt{(a^2+b^2)} - a$ hat, die Hypot. eines rechtw. Tr. sein muß, der die Sp. des rechten W. auf der gr. L. CDZ hat. Diese Spitze ist ein oder der andere Durchschnittsp. f oder f′ der L. CDZ mit dem Umfange des Halbkr. AH′M′; und jede der L. fAe, f′Ae′ ist noch gl. b.

§ 87. Anmerk. Man sieht, daß überhaupt die Aufg. vier Aufl. hat. Denn in der That entsprechen den zwei Werthen von x, vier Werthe von y, nämlich AE, AE′; Ae, Ae′. Denn da man $a^2 + ax = y^2 + by$ gefunden hat, so hat man, wenn man successive für x ihre zwei Werthe setzt und y befreit,

$$y = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{b^2}{4} + a^2 + a\sqrt{(a^2+b^2)}\right]},$$

$$y = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left[\frac{b^2}{4} + a^2 + a\sqrt{(a^2+b^2)}\right]},$$

$$y = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{b^2}{4} + a^2 - a\sqrt{(a^3+b^2)}\right]},$$

$$y = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left[\frac{b^2}{4} + a^2 - a\sqrt{(a^2+b^2)}\right]}.$$

Die beiden ersten Werthe von y sind immer reel; aber die zwei andern können imaginair sein, und sind es immer zu gleicher Zeit. Dieses geschiehet, wenn die Größe $\frac{b^2}{4} + a^2$ kl. als die Größe $a\sqrt{(a^2 + b^2)}$ ist, oder wenn $b^2 < 8a^2$. Alsdann fällt der Halbkr. AH'M' ganz unter CZ, und die Durchschnittsp. f, f' der CZ mit dem halben Kreisumfang AH'M' werden imaginair; denn weil man $b^2 < 8a^2$ hat, so ist klar, daß der Halbm. FH', der zum Werthe $\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} - a}{2}$ hat, kl. denn a ist.

Hätte man $\frac{b^2}{4} + a^2 = a\sqrt{(a^2 + b^2)}$, so werden die zwei letzteren Werthe von y gleich, und die beiden P. f und f' fallen alsdann in einem und denselben P. H' zusammen, wo CZ den Halbkr. AH'M' berührt.

§ 88. **Aufg.** Einen Kreis zu beschreiben, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie AB in einem gegebenen Punkt C und zugleich einen andern der Lage und Größe nach gegebenen Kreis X berührt, dessen Mittelpunkt D. (Fig. 35.)

**Aufl.** Der gesuchte Mittelp. F des zu constr. Kreises muß in einem in C auf AB errichteten Perpd. liegen, weil AB eine Tang. dieses Kr. sein muß. Der Halbm. CF sei x. Zieht man nun FD, so muß FG ebenfalls gl. x werden. Aus dem Mittelp. D des gegebenen Kr. fälle DH = a auf AB perpd; ist nun DE = r, HC = b, so entstehet die Gleichung

$$(x + r)^2 = b^2 + (a - x)^2,$$

und hieraus $2(a + r)x = b^2 + a^2 - r^2$,

oder $2 \cdot HK \cdot x = CD^2 - r^2$,

oder auch $2 \cdot HK \cdot x = CL \cdot CN$;

oder auch, wenn man CN in M halbirt,

$$HK . x = CL . CM.$$

x ist also die 4te Proportionale zu HK, CL und CM.

§ 89 Aufg. Wenn die gerade Linie DE der Größe und Lage nach außerhalb eines ebenfalls der Größe und Lage nach gegebenen Kreises gegeben ist, in der Peripherie einen solchen Punkt A zu finden, daß, wenn man aus A nach dem Endpunkt von DE, AD, AE zieht, welche die Peripherie in B und C schneiden, die Sehne BC ∥ DE sei. (Fig. 56.)

Aufl. Die Aufg. soll auf zwei Arten aufgelöst werden, um dem Leser den Vortheil zu zeigen, der da ist, gewisse L. vor andern vorzugsweise als unbekannt anzusehen, um zu der möglich einfachsten Endgleichung zu gelangen. Wie auch schon im vorhergehenden bemerkt worden.

Erste Aufl. Da man die Größe und Lage von DE und des Kr. X kennt, so werden, wenn wir aus dem Mittelp. O auf DE den Prpd. OK fällen, den Halbm. OB und nachgehends aus D an den Kr. die Tang. DF ziehen, alle L. DE, OB, OK, DK, DF gegeben sein. Aber die L. DB, DA, BC, EC, EA sind unbekannte, und die Frage ist, sie zu bestimmen, oder wenigstens die nöthigen L. zu finden, um die Bedingungen der Aufg. zu erfüllen. Wir wollen die beiden L. DB, BC als unbekannte annehmen und zwei Gleichungen zu bilden suchen, welche die Rel. von diesen zwei Größen mit den gegebenen Größ. ausdrücken.

Wir wollen annehmen $\begin{cases} DE = a, & DF = f, \\ OB = b, & DB = x, \\ OK = c, & BC = 2y. \\ DK = d, & \end{cases}$

Man hat $DA = \frac{DF^2}{DB} = \frac{f^2}{x}$; Lehmus §166

also $AB = DA - DB = \frac{f^2}{x} - x = \frac{f^2 - x^2}{x}$.

Die ähnl. Tr. ADE, ABC geben diese Propt.:

$$AD : DE = AB : BC,$$

oder $\frac{f^2}{x} : a = \frac{f^2 - x^2}{x} : 2y$;

woraus man die Gleichung zieht

$$\text{I.}\quad 2y = a \cdot \frac{f^2 - x^2}{f^2}, \text{ oder } x^2 = f^2 - \frac{2f^2y}{a}.$$

OK, die perpd. auf DE ist, ist auch perpd. auf BC, die parallel mit DE angenommen ist; der P. M ist die Mitte von BC. Mithin, wegen der rechtwinkl. Tr. OMB, hat man $OM = \sqrt{(OB^2 - BM^2)} = \sqrt{(b^2 - y^2)}$; und $MK = OK - OM = c - \sqrt{(b^2 - y^2)}$.

Ist B aus BH perpd. auf DE, so hat man $BH = MK$, $DH = KH - KD = BM - KD = y - d$; und (wegen der rechtw. Tr. BHD), $BD^2 = BH^2 + DH^2$; dieses giebt die Gleichung

$$x^2 = (y - d)^2 + [c - \sqrt{(b^2 - y^2)}]^2,$$

oder auch (indem man die Qdr. entwickelt und die Glieder wegläßt, die sich aufheben),

$$x^2 = d^2 - 2dy + c^2 - 2c\sqrt{(b^2 - y^2)} + b^2,$$

oder auch noch

$$b^2 + c^2 + d^2 - 2dy - x^2 = 2c\sqrt{(b^2 - y^2)}.$$

Setzt man, um abzukürzen,

$$b^2 + c^2 + d^2 = g^2$$

und quadrirt alles, um die Wurzelzeichen verschwinden zu lassen, so wird man haben

$$\text{II.}\quad g^4 - 4g^2dy + 4d^2y^2 - 2g^2x^2 + 4dx^2y + x^4 = 4b^2c^2 - 4c^2y^2,$$

Wenn die zwei Gleichungen I. und II. zusammen nach algebraischen Methoden combinirt werden, so bringen sie eine Gleichung hervor, in welcher nur noch eine von den zwei unbekannten x und y vorkommt. Macht man mit der Eliminirung von y den Anfang, so findet man eine Gleichung von der Form;

$$x^4 + Ax^2 + B = 0,$$

Und eliminirt man x, so findet man eine Gleichung von dieser Form;

$$y^2 + Cy + D = 0.$$

Die Größen A, B, C, D bestimmen sich durch die gegebenen a, b, c, d, f.

Um also DB zu haben, muß man eine Gleichung vom vierten Graden auflösen, und um BC zu haben, muß man eine Gleichung vom zweiten Grade auflösen.

Kennt man eine oder die andere von diesen Linien, so wird man leicht den Ort des P. A finden und könnte also die Sehne BC ziehen. Denn gesetzt z. B., man kennte DB; beschreibt aus D als Mittelp. mit dem Halbm. DB einen Kreisbg.; ziehet durch B, wo dieser Bg. die Periph. des gegebenen Kr. schneidet, die gr. L. DBA; ziehet von A nach E die gr. L. ACE, welche den Kreisumfang in C trifft, und zieht die Sehne BC: so wird diese Sehne mit DE prllel. sein, weil der Werth von DB aus der Annahme abgeleitet ist, daß BC wirklich prll. mit DE sei.

Kennte man nur y, so wäre man auch im Stande, die Lage von A zu bestimmen; denn man dürfte nur KH gl. dem für y gefundenen Werth; aus H, perpd. auf DE, die HB ziehen, welche die Periph. im P. B trifft, und durch D und B die gr. L. DBA ziehen. Das Uebrige wird wie vorhin vollendet.

Ich begnüge mich, die Methoden, die Lage von A zu

bestimmen, anzudeuten, indem man annimmt, x und y seie bekannt; aber ich constr. nicht die Gleichung in x und y, weil die eine oder die andere Gleichung ein wenig zusammengesetzt ist, und die Aufgabe durch eine viel einfachere Gleichung gelöst werden kann, die wir, wie wir in der folgenden zweiten Aufl. sehen werden, constr. wollen.

Zweite Aufl. Aus D (Fig. 37) ziehe die Tg. DF an den Kr. X, und in B denke man sich eine Tang. BN, welche DE in N trifft.

Dieses angenommen, so bemerke ich, daß die zwei Tr. DAE, DNB ähnlich sind; denn beide haben den W. D gemein., überdem ist W. DNB gl. seinem Wechselw. CBN; und dieser, der im Berührungsp. B durch eine Sehne BC und Tang. BN gebildet ist, ist auch gl. dem W. A im entgegensetzten Abschnitt. Wir haben also die Propt.

$$DE : DA = DB : DN. \quad \text{Aber } DN = \frac{DA \cdot DB}{DE}.$$

$$\text{Aber } DA \cdot DB = DF^2, \qquad \text{Mithin } DN = \frac{DF^2}{DE}.$$

Bezeichnen wir die unbekannte DN mit z, so ist $z = \frac{f^2}{a}$, eine Gleichung vom ersten Grade, und man sieht, daß die gesuchte Linie DN eine dritte Proportionale zu den beiden gegebenen L. DE, DF sei. Die Constr. wird daher auf eine sehr einfache Weise ausgeführt. Verb. E und F durch EF; Fig. 38 von E nach I trage DF; ziehe IV prll. zu DF; nimm DN gl. IV: so ist N der verlangte P., denn aus dieser Constr. geht hervor, daß

$$ED : DF = EI \text{ oder } DF : IV \text{ oder } DN = \frac{DF^2}{DE}.$$

Da man aus N zwei Tang. NB, NB′ an den Kr. X ziehen kann, so giebt es in der Periph. zwei P. A und A′,

welche der Aufg. Genüge leisten. Sie werden bestimmt, indem man durch D und durch jeden der andern P. B und B′ die gr. L. DBA, DA′B′ zieht, so daß, wenn man aus diesen P. A, A′, zu dem andern Endp. E der gr. L. DE die gr. L. ACE, C′A′E zieht und B und C verbindet, so wie auch die beiden P. B′ und C′, so wird jede der Sehnen BC, B′C′ parallel zu DE sein. Dieser Parallelismus muß nothw. Statt finden, weil der P. A oder A′ nur nach der Annahme bestimmt worden, daß BC oder B′C′ in der That parallel zu DE seien.

## Bemerkung über die zwei vorstehenden Aufl.

§ 90. Von den drei Größen z, y, x, ist die erste durch eine Gleich. vom ersten; die zweite durch eine Gleichung vom zweiten; die dritte durch eine Gleichung vom vierten Grade gegeben. Hier die Rel. von diesen Größen:

1) Man bedarf nur des einzigen P. N oder der gr. L. DN, um die zwei gl. Tang. NB, NB′, welche die P. A und A′ und folgl. die beiden Sehnen BC, B′C′ bestimmen, zu ziehen. Die unbekannte 2y muß ohne Unterschied die Sehnen BC, B′C′ vorstellen, weil diese zwei Sehnen nach einerlei Gesetze gezogen sind. Mithin müssen zu einerlei z zwei y gehören, oder, welches auf eins hinaus läuft, zu der Gleichung vom ersten Grade, welche z giebt, muß eine Gleichung vom zweiten Grade für y gehören.

2) In der ersten Aufl. haben wir gefunden:

$$x^2 = f^2 - \frac{2f^2y}{a}.$$

Diese Gl. giebt $x = \pm f\sqrt{\frac{a-2y}{a}}$;

woraus man sieht, daß wegen des doppelten Zeichens

$\pm$, zu jedem Werth von y zwei gl. Werthe von x gehören, ein pos. und ein neg. Es giebt also vier x für zwei y; und wenn man BD oder B′D nach a oder a′ hin verl., sich den Kr. X′ in derselben Lage denkt, die gr. L. DE in DE′; so werden alsdann die vier Werthe von x vorgestellt durch vier L. DB, DB′, Db, Db′, die zwei und zwei gl. sind, und auch zwei und zwei entgegengesetzt liegen.

§ 91. Aufg. Alle Dimensionen eines Triangels ABC zu bestimmen, wenn man seine Höhe BD und die Halbm. OA, VH des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises kennet. (Fig. 39.)

Aufl. Aus dem Mittelp. V des eingeschr. Kr. ziehe ich nach dem Berührungsp. dieses Kr. mit den S. AC, AB, BC des Kr. die Halbm. VR, VM, VH, welche auf diesen S. perpd. sind; durch denselben P. V und durch den Scheitel B des Tr. führe ich die gr. L. BVZ, welche die Peripherie des umschr. Kr. in Z trifft; endlich ziehe ich den Halbm. OZ und die Sehne CZ.

Setzen wir {
- die Höhe BD . . . . . . . . . . = a,
- der Halbm. VR des eingeschr. Kr. = b,
- der Halbm. OZ des umschr. Kr. . = c,
- die Grundl. AC des Tr. . . . . . = x,
- BH . . . . . . . . . . . . . . . = y,

so hat man sogleich den Inhalt des Tr. ABC $= \frac{ax}{2}$.

Andererseits ist der Inhalt dieses Tr. auch gl. dem Prod. aus dem halben Umfang des Tr. mit dem Halbm. des eingeschr. Kr., d. h., $= \frac{AC + AB + BC}{2} \cdot VR$. Aber, da

$$BM = BH, \quad AR = AM, \quad CR = CH,$$

Inhalt ΔABC = $\frac{AR \times RV}{2} + \frac{CR \times RV}{2} + \frac{CH \times HV}{2} + \frac{BH \times HV}{2}$ ...
= $\left(\frac{AR + CR}{2} + \frac{CH + BH \ldots}{2}\right)$ ...

so hat man $AC + AB + BC$,
oder $AC+AM+MB+BH+HC = AC+AR+BH+BH+CR$,
$$= 2AC + 2BH = 2x + 2y;$$
mithin $\frac{AC + AB + BC}{2} . VR = bx + by$.

Beide Werthe vom Inhalt des Tr. gl. gesetzt, giebt die Gleichung

$$\text{I.} \quad \frac{ax}{2} = bx + by, \text{ oder } ax = 2bx + 2by$$

Da der W. ABC durch BZ halbirt ist, so ist Z die Mitte des Bog. AZC, und der Halbm. OZ ist auf die Sehne AC in ihrer Mitte perpd. Mithin

$$AQ = \frac{x}{2}, \quad QO = \sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)};$$
$$QZ = OZ - OQ = c - \sqrt{(c^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}.$$

Die ähnl. rechtw. Tr. BHV, CQZ geben
$QZ : CQ = VH : BH$, also $QZ . BH = CQ . VH$, oder
$$\text{II.} \quad cy - y\sqrt{(c^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} = \tfrac{1}{2}bx.$$

Setzt man in dieser Gleich. statt y seinen Werth $\frac{ax - 2bx}{2b}$ aus der Gleich. I., so wird man haben:
$$(ax - 2bx) . [c - \sqrt{(c^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}] = bx;$$
welches giebt
$$x = \pm \frac{2b\sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}}{a - 2b},$$
und folgl. $y = \pm \sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}$.

Da nun die Grdl. x des Tr. bekannt ist, so können wir ihm auf folgende Art constr.:

Nachdem man auf dem Durchm. AM (Fig. 40) des umschr. Kr. $AF = a - 2b$ genommen und in F auf AM den Prpd. FI errichtet hat, so beschr. man über der Sehne AI als Durchm. einen Halbkr. AFI. In diesem Halbkreis trage man die Sehne $IL = b$ ein und ziehe die Sehne LA,

welche man unbestimmt nach K zu verl. Verbindet man L und F durch LF und zieht, nachdem man AP = 2b genommen, durch P die PK || FL, so hat man

$$AK = x = \frac{2b\sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}}{a - 2b}.$$

Denn da $AI^2 = AM \cdot AF$, so hat man

$$AI^2 = 2ac - 4bc;$$

und wegen der rechtw. Tr. ALI, $AL = \sqrt{(AI^2 - IL^2)}$

$$= \sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}.$$

Wegen der Prllen. FL, PK hat man die Propt.:

$$AF : AL = AP : AK; \text{ also } AK = \frac{AL \cdot AP}{AF},$$

oder
$$AK = \frac{2b\sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}}{a - 2b}.$$

Es ist also AK gl. der Grdl. des Tr., und wenn man demnach in dem umschr. Kr. die Sehne AC=AK einträgt, so werden wir die Grdl. AC unsers Tr. haben. In einem bel. P dieser Grdl. sei ein Perpd. CS = a errichtet; und durch S sei SB′B || CA gezogen, welcher den umschr. Kr. in B und B′ schneidet, die man jeden, ohne Unterschied, für den Scheitel des gesuchten Tr. ABC oder AB′C nehmen kann. Jeder von diesen zwei congr. Tr. genüget den pos. Werthen von x und y. Die Constr. ist für die neg. Werthe die nämliche, die sich von den pos. nur durch die resp. Lage der Linien unterscheiden.

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, weil es unsere Gleich. deutlich genug sagen, daß die Aufg. unmöglich sein wird, wenn man $2ac < 4bc + b^2$ hätte.

§ 92. Anmerk. 1. Obgleich die vorstehende Constr. nicht sehr zusammengesetzt ist, so kann man doch davon eine andere geben, die viel einfacher ist. Dieserhalb bemerken wir, daß wegen (Fig. 39.)

$$QZ = c - \sqrt{(c^2 - \tfrac{1}{4}x^2)},$$

und aus der Gleichung:

$$\frac{ax - 2\,bx}{2\,b} \cdot [c - \sqrt{(c^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}] = \tfrac{1}{2}bx,$$

hat man $QZ = \dfrac{b^2}{a - 2b}$.

Woraus sich ergiebt, daß QZ eine dritte Propt. zu $a - 2\,b$ und b ist. Ist dieser Werth bestimmt, so ziehe aus dem Mittelp. des umschr. Kr. OZ bel.; nimm auf diesem Halbm. $ZQ = \dfrac{b^2}{a - 2b}$, und errichte in Q auf OZ den Perpd. AC, der, nach beiden Seiten verl., die Grdl. AC des Tr. giebt. Das Uebrige der Constr. wird wie oben vollendet.

Hieraus sieht man, daß es vortheilhaft ist, zu überlegen und zur Grdl. der Constr. diejenige L. zu wählen, die auf dem kürzesten Wege zum Ziele führt.

§ 93. Anmerk. 2. Noch wichtiger ist es, die unbek., welche dem Kalkül zur Grdlagdienen soll, gut zu wählen. Hätte man das Segment AD als unbek. gewählt, oder sonst eine analoge L., so würde die Endgleichung von einem höhern Grade gewesen sein. Denn es sei (Fig 39) die unbekannte AD = z, und die andern Benennungen wie oben. Aus dem Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises ziehe ON auf AB perpendikular, so wird man haben:

$$AN = \tfrac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{(a^2 + z^2)}}{2};$$

$$ON = \sqrt{(OA^2 - AN^2)} = \frac{\sqrt{(4\,c^2 - a^2 - z^2)}}{2};$$

$$CD = AC - AD = x - z.$$

Nun geben die rechtw. ähnl. Tr. CDB, ONA,

$$CD ; DB = ON : AN, \text{ oder}$$

$$x - z : a = \frac{\sqrt{(4c^2 - a^2 - z^2)}}{2} : \frac{\sqrt{(a^2 + z^2)}}{2}.$$

Aus-

Quadrirt man jedes Glied, macht das Produkt der äußern und mittlern Glieder und ordnet die Gl. nach z, so zieht man hieraus:

$$\left.\begin{matrix} z^4 - 2xz^3 + 2a^2 \\ + x^2 \end{matrix}\right\} z^2 - 2a^2xz + \left.\begin{matrix} a^2x^2 \\ + a^4 \\ + 4a^2c^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Man sieht, daß zu einerlei x vier Werthe von z gehören. In der That (Fig. 40) kann das unbekannte z sowohl das Segment DA, oder DC, oder D'A, oder das Segm. D'C vorstellen; denn, welches von diesen Segm. man auch für die unbekannte nehmen mag, so wird diese unbekannte mit den gegebenen Größen immer auf einerlei Art verbunden sein, und man wird immer zu derselben Endgl. gelangen.

§ 94. Anmerk. 5. Wir ziehen hieraus, um zu den möglichst einfachsten Gl. zu gelangen, folgende allgem. Regel. Wenn in einer geom. Aufg. sich zwei unbek. finden, welche mit den gegebenen Größen eine solche Relation haben, daß, wenn man die eine oder die andere als unbekannt nimmt, die Endgl. von derselben Gattung sei; oder wenn, indem man diese zwei Größen im Kalkül aufnimmt, die Gl., in welchen sie vorkommen, bis auf einigen Unterschied in den vorstehenden Zeichen ähnl. sind, so muß man alsdann keine von beiden Größen für die unbekannte nehmen, sondern als unbekannte eine andere Größe wählen, die darauf Beziehung hat. Dieserhalb ist, in dem vorhergehenden Beisp., statt des Segm. der Grdl. vielmehr die Grdl. AC als unbekannt genommen, die zu diesem Segm. gl. Beziehung hat. Von dieser Regel haben wir in einigen der vorhergehenden von uns aufgelösten Aufg. Gebrauch gemacht, und wird deren Nützlichkeit ebenfalls bei denen erkennen, die man sich aufgeben könnte.

§ 95. Aufg. **Man kennt den in einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegenden Winkel BAC, und die beiden Winkel BAb, CAc, welche die Seite AB, AC, mit der horizontalen Ab, Ac machen, die in zwei längs dieser S,**

gelegten Ebenen liegen, man verlangt den W. bAc, welcher die Projektion des Winkels BAC auf den Horizont ist. (Fig. 41.)

Aufl. Aus einem auf AC bel. P. C fälle ich CB perpd. auf AB; und nachdem aus B und C die Verticalen Bb, Cc, gezogen werden, welche die Horizontalen Ab, Ac in b und c treffen, ziehe ich bc. Aus C ziehe ich Cd prpd. auf Bb und aus c, cf perpd. auf Ab. Nunmehr

nennen wir:

| | |
|---|---|
| Den Sinustotus oder den Halbm. der Tafeln | 1, |
| den W. BAC . . . . . . . . . . . . . | $2\alpha$, |
| den W. ABb . . . . . . . . . . . . . | $2\beta$, |
| den W. ACc . . . . . . . . . . . . . | $2\gamma$, |
| den W. bAc . . . . . . . . . . . . . | $2\delta$, |
| AC . . . . . . . . . . . . . . . . | n. |

Unter diesen Größen ist nur $2\delta$ unbekannt.

Im rechtw. Tr. BCA hat man:

$$BC = n \,.\, \text{Sin.}\, 2\alpha; \quad AB = n \,.\, \text{Cos.}\, 2\alpha.$$

In den drei rechtw. Tr. BbA, CcA, cfA hat man gleichfalls

$$Bb = n \,.\, \text{Cos.}\, 2\alpha \,.\, \text{Cos.}\, 2\beta,$$
$$Ab = n \,.\, \text{Cos.}\, 2\alpha \,.\, \text{Sin.}\, 2\beta,$$
$$Cc = n \,.\, \text{Cos.}\, 2\gamma,$$
$$Ac = n \,.\, \text{Sin.}\, 2\gamma,$$
$$cf = n \,.\, \text{Sin.}\, 2\gamma \,.\, \text{Sin.}\, 2\delta,$$
$$Af = n \,.\, \text{Sin.}\, 2\gamma \,.\, \text{Cos.}\, 2\delta.$$

Jetzt haben wir

$$Bd = Bb - db = Bb - Cc = n\,(\text{Cos.}\, 2\alpha \,.\, \text{Cos.}\, 2\beta - \text{Cos.}\, 2\gamma).$$

Mithin, wegen des rechtw. Tr. BdC hat man

$$dC^2 = BC^2 - Bd^2 = n^2\,[\text{Sin.}\, 2\alpha^2 - (\text{Cos.}\, 2\alpha \,.\, \text{Cos.}\, 2\beta - \text{Cos.}\, 2\gamma)^2].$$

Eben so hat man

$$bf = Af - Ab = n\,[\text{Sin.}\, 2\gamma \,.\, \text{Cos.}\, 2\delta - \text{Cos.}\, 2\alpha \,.\, \text{Sin.}\, 2\beta].$$

Mithin, wegen des rechtw. Tr. bfc haben wir

$$bc^2 = fc^2 + bf^2,$$

also $bc^2$ oder $dC^2 = n^2 [\mathrm{Sin}.\, 2\gamma^2 \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\delta^2 +$
$(\mathrm{Sin}.\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\delta - \mathrm{Cos}\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\beta)]^2$;
die zwei Werthe von $dC^2$ geben, mit $n^2$ dividirt, die Gl.

$$\mathrm{Sin}.\, 2\alpha^2 - (\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\beta - \mathrm{Cos}.\, 2\gamma)^2$$
$$= \mathrm{Sin}.\, 2\gamma^2 \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\delta^2 + (\mathrm{Sin}.\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\delta - \mathrm{Cos}\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Sin}\, 2\beta)^2;$$

führt man die angezeigten Multiplikationen aus, so ergiebt sich sogleich

$$\mathrm{Sin}.\, 2\alpha^2 - \mathrm{Cos}.\, 2\alpha^2 \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\beta^2 - \mathrm{Cos}.\, 2\gamma^2 + 2\,\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\gamma = \mathrm{Sin}.\, 2\gamma^2 \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\delta^2 + \mathrm{Sin}.\, 2\gamma^2 \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\delta^2 + \mathrm{Cos}.\, 2\alpha^2 \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\beta^2 - 2\,\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\delta,$$

oder auch

$$\mathrm{Sin}.\, 2\alpha^2 + 2\,\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\gamma = \mathrm{Cos}.\, 2\gamma^2 + \mathrm{Cos}.\, 2\alpha^2 (\mathrm{Sin}.\, 2\beta^2 + \mathrm{Cos}.\, 2\beta^2) + \mathrm{Sin}.\, 2\gamma^2 (\mathrm{Sin}.\, 2\delta^2 + \mathrm{Cos}.\, 2\delta)^2 - 2\,\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Cos}\, 2\delta,$$

oder auch, da die Summe der Qdr. vom Sin. und Cos. eines W. = 1,

$$\mathrm{Sin}.\, 2\alpha^2 + \mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\gamma = \mathrm{Cos}.\, 2\gamma^2 + \mathrm{Cos}.\, 2\alpha^2 + \mathrm{Sin}.\, 2\gamma^2 - 2\,\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\delta;$$

oder auch noch, da $\mathrm{Cos}.\, 2\gamma^2 + \mathrm{Sin}.\, 2\gamma^2 = 1$, $\mathrm{Sin}.\, 2\alpha^2 - \mathrm{Cos}.\, 2\alpha^2 + 2\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\gamma = 1 - 2\mathrm{Cos}.\, 2\alpha \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Sin}\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\gamma$, oder auch, wenn man statt $\mathrm{Sin}.\, 2\alpha^2 - \mathrm{Cos}.\, 2\alpha^2$ seinen Werth $1 - 2\,\mathrm{Cos}.\, 2\alpha^2$ setzt, alle Gl, welche sich aufheben, wegläßt, und alles durch $2\,\mathrm{Cos}.\, 2\alpha$ dividirt,

$$\mathrm{Cos}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\gamma - \mathrm{Cos}.\, 2\alpha = - \mathrm{Sin}.\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\gamma \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\delta;$$

woraus man endlich zieht

$$\mathrm{Cos}.\, 2\delta = \frac{\mathrm{Cos}.\, 2\alpha - \mathrm{Cos}\, 2\beta \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2\gamma}{\mathrm{Sin}.\, 2\beta \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2\gamma}.$$

Ist aber $\mathrm{Cos}.\, 2\delta$ bekannt, so hat man auch

$$\mathrm{Sin}.\, 2\delta = \pm \sqrt{(1 - \mathrm{Cos}.\, 2\delta^2)}.$$

Um den Werth von $\mathrm{Cos}.\, 2\delta$ zu Constr., bringe ich die Gl. zuerst unter dieser Form:

$$\text{Cos. } 2\delta = \frac{1}{\text{Sin. } 2\beta} \cdot \left( \frac{\text{Cos. } 2\alpha}{\text{Sin. } 2\gamma} - \frac{\text{Cos. } 2\beta \,.\, \text{Cos. } 2\gamma}{\text{Sin. } 2\gamma} \right);$$

nachgehends suche ich zwei vierte Proportionalen: die eine zu den drei, durch Sin. $2\gamma$, Cos. $2\alpha$ und 1; die andere zu den drei, durch Sin. $2\gamma$, Cos. $2\beta$, Cos. $2\gamma$ vorgestellten Linien. Die zweite vierte Proportionale ziehe ich von der ersten ab, und nenne d die Differenz. So haben wir dadurch $\text{Cos. } 2\delta = \frac{1 \,.\, d}{\text{Sin. } 2\beta}$; und es kömmt nur noch, um den geom. Ausdruck für Cos. $2\delta$ zu haben, darauf an, die 4te Proportionale zu Sin. $2\beta$, 1 u. d zu suchen.

Diese Aufg. ist in der Feldmeßkunst nützlich, um auf einerlei Horizontalebene mehrere gegen diese Ebene ungleich hoch liegende Gegenstände zu bringen.

§ 96. Anmerk. 1. Man sieht, daß zu einerlei Cos. $2\delta$ zwei Werthe von Sin. $2\delta$ gehören. Der Grund ist dieser: denken wir uns, daß der W. bAc, den wir verkürzt sehen, (Fig. 41), in bAc (Fig. 42) in seiner wahren Größe gezeichnet sei, und mache den W. b'Ac = bAc. Hat man nachgehends AM = 1, d. h. für den Sinustotus angenommen, so ist, wenn auch MM' auf Ac perpd.; MN = Sin. bAc, M'N = Sin. b'Ac u. AN der Cos. von beiden W. Also gehören zu einerlei Cos. zwei gl. große Sin., die, da sie einander entgegengesetzt liegen, mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden müssen. Wenn nun der gegebene W. BAC (Fig. 41), statt zur Projection den W. bAc zu haben, den W. b'Ac zur Projection hätte, so fände man den Sin. und Cos. dieses letzteren W. durch ganz ähnl. Raisonnements und Kalküls, als die waren, wodurch wir den Cos. und Sin. des W. bAc gefunden haben. Die Gleich. für Cos. $2\delta$ und Sin. $2\delta$ müssen also beide Fälle enthalten. Diese Gleich. müssen also so beschaffen sein, daß für einerlei Cos. $2\delta$ man zwei Sin. $2\delta$ habe.

§ 97. Anmerk. 2. Obgleich der von uns für Cos. $2\delta$ gefundene analytische Ausdruck sehr einfach ist, so ist er doch in dem Tri-

gon. praktischen Kalkül nicht bequem genug, wo es schicklich ist, so viel Formeln, als möglich, von einem Gliede anzuwenden, damit man mit Bequemlichkeit die Abkürzungen anbringen kann, welche die Logarithm. Tafeln darbieten. Wenn man aber statt der Gleich. $\text{Cos. } 2\delta = \frac{\text{Cos. } 2\alpha - \text{Cos. } 2\beta \,.\, \text{Cos. } 2\gamma}{\text{Sin. } 2\beta \,.\, \text{Sin. } 2\gamma}$; die gleichgeltende Gleich. schreibt:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\text{Cos. } 2\delta = \tfrac{1}{2} - \frac{\text{Cos. } 2\alpha - \text{Cos. } 2\beta \,.\, \text{Cos. } 2\gamma}{2\,\text{Sin. } 2\beta \,.\, \text{Sin. } 2\gamma},$$

oder $\frac{1 - \text{Cos. } 2\delta}{2} = \frac{\text{Sin.} 2\beta \,.\, \text{Sin.} 2\gamma + \text{Cos. } 2\beta \,.\, \text{Cos.} 2\gamma - \text{Cos.} 2\alpha}{2\,\text{Sin } 2\beta \,.\, \text{Sin. } 2\gamma}$,

so wird jede Seite leicht auf die eben angezeigte Form reducirt werden können.

Wirklich lehrt die Trig., daß $\frac{1 - \text{Cos. } 2\delta}{2} = \text{Sin. } \delta^2$.

2) $\text{Sin. } (\alpha + \beta - \gamma) \,.\, \text{Sin.} (\alpha + \delta - \beta) = \tfrac{1}{2}\text{Cos.} (2\beta - 2\gamma)$ $- \tfrac{1}{2}\text{Cos. } 2\alpha = \frac{\text{Cos. } 2\beta \,.\, \text{Cos. } 2\gamma + \text{Sin. } 2\beta \,.\, \text{Sin. } 2\gamma}{2} - \tfrac{1}{2}\text{Cos. } 2\alpha.$

Wir haben also

$$\text{Sin. } \delta^2 = \frac{\text{Sin. } (\alpha + \beta - \gamma) \,.\, \text{Sin.} (\alpha + \gamma - \beta)}{\text{Sin. } 2\beta \,.\, \text{Sin. } 2\gamma};$$

setzt man, um abzukürzen, $\alpha + \beta + \gamma = S$, so ist

$$\text{Sin. } \delta^2 = \frac{\text{Sin. } (S - 2\beta) \,.\, \text{Sin} (S - 2\gamma)}{\text{Sin. } 2\beta \,.\, \text{Sin. } 2\gamma}.$$

Woraus man folgendes sieht: **um das Qdr. vom Sin. des halben Projectionsw. zu finden, muß man das Prod. der Sin. von dem Ueberschuß der halben Summe der drei W. $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ über jeden der beiden andern durch das Produkt der Sin. der beiden W. $2\beta$, $2\gamma$, dividiren:** eine Formel, bei welcher man leicht den Trig.- und Logar.-Kalkül anbringt.

Gesetzt, man habe $2\alpha = 18^\circ$, $2\beta = 88^\circ$, $2\gamma = 89^\circ$ und folgl. $S - 2\beta = 9^\circ 30'$; $S - 2\gamma = 8^\circ 30'$, so wird

die Rechnung mittelst der trigon. Tafeln so geführt. Für den Halbm. r wäre

$$\text{Sin. } \delta^2 = \frac{r^2 \cdot \text{Sin. } (S - 2\beta) \cdot \text{Sin. } (S - 2\gamma)}{\text{Sin. } 2\beta \cdot \text{Sin. } 2\gamma},$$

| | | |
|---|---|---|
| daher lg. $r^2$ | . . . . . . | $= 20{,}0000000$ |
| lg. Sin. $(S - 2\beta)$ | . . . . . . | $= 9{,}2176092$ |
| lg. Sin. $(S - 2\gamma)$ | . . . . . . | $= 9{,}1697021$ |
| Compl. lg. Sin. $2\beta$ | . . . . . . | $= 0{,}0002645$ |
| Compl. lg. Sin. $2\gamma$ | . . . . . . | $= 0{,}0000661$ |
| | | $18{,}3876419$ |
| | 2) | $9{,}1938209$, |

welches der Bog. von Sin. $\delta$ ist. Suchet man dieses Bog. in den Tafeln auf, so wird man finden, daß dieser W. nahe entspricht

$$\delta = 8^\circ\ 59'\ 28'',$$

und folgl. der Projectionsw. beinahe $2\delta = 17^\circ\ 58'\ 56''$ ist.

§ 98. Anmerk. Die vorhergehenden Aufg. scheinen mir einen unterrichteten Leser in Stand zu setzen, sich mit andern Fragen von derselben Art zu üben. Man wird übrigens auch noch in der Folge verschiedene Anwendungen der Algebra auf die Geom. finden, die mehr und mehr den Geist und die Wahl der Mittel kennen lehren, welche man anwenden muß, um beide Wissenschaften zu verbinden. Ich schließe dieses Kapitel mit der allgemeinen constr. der Gleichungen vom ersten und zweiten Grade. Die Ordnung scheint zu erfordern, daß ich mit der Anweisung, die Gleichungen zu constr., den Anfang hätte machen sollen und nicht mit Aufg., weil man keinen geom. Ausdruck aus der Endgleichung einer Aufg. ziehen kann, wenn man sie nicht zu constr. versteht. Ich wollte aber nicht mit allgem. Regeln den Anfang machen, die man immer nur mit Mühe deutlich einsieht, wenn sie nicht mit einigen Anwendungen begleitet sind, und ich zog daher vor, besondere Constr. am Ende einer jeden besondern Aufg. zu geben. Jetzt, da man deutlich den Zweck der Constr. einsieht, folgt hier noch kurz die Methode allgemein, die Gleichungen der zwei ersten Grade zu constr., oder, welches auf eins hinaus kömmt, die Rationalen- und die Wurzelgrößen des zweiten Grades zu constr.

## Allgemeine Construktion der Gleichungen vom ersten Grade.

§ 99. Um die Gleichung $x = \frac{ab}{c}$ zu constr., suche man eine vierte Proportionale zu c, a und b.

Hätte man $x = \frac{abe}{cd}$, so sucht man, wie im vorhergehenden Beispiel, den Werth von $\frac{ab}{c}$. Nennen wir f diesen Werth; so ist erforderlich $\frac{fe}{d}$ zu constr.; welches geschieht, indem man eine vierte Proportionale zu d, f und e sucht. Und so ferner, wenn die Glieder des Bruches eine größere Zahl von Dimensionen hätte.

Wäre der Werth der unbekannten aus mehreren Brüchen zusammengesetzt, z. B., hätte man $x = \frac{ab}{c} + \frac{fgh}{lm} + \frac{mnpq}{rst}$, so sucht man nach und nach die Werthe von allen diesen Brüchen und setzt sie mit den zukommenden Zeichen zusammen; diese Vereinigung wird der Werth von x sein.

§ 100. Dieselben Mittel dienen, ein Rect. in ein anderes von gegebener Seite zu verwandeln, einen Körper in einen andern von zwei gegebenen Seiten, ein Prod. von vier Dimensionen in ein anderes, von welchen drei Dimensionen gegeben sind rc. Denn es sei z. B. das Qdr. $b^2$, welches man in ein Rect. verwand. soll, welches die beliebige Seite a haben soll: ich dividire $b^2$ durch a, welches

$\frac{b^2}{a}$ giebt, und suche durch die vorhergehende Methode eine Linie gl. $\frac{b^2}{a}$. Es sei m diese Linie, so haben wir $\frac{b^2}{a} = m$, und folgl. $b^2 = a \cdot m$.

Hätte man $f^2c$ zu verwandeln, so daß der neue Körper die zwei Dimensionen ab hätte, so suchte man eine L. n gl. $\frac{f^2c}{ab}$, und man hätte $\frac{f^2c}{ab} = n$, und folgl. $f^2c = abn$ ꝛc.

§ 101. Wir wollen jetzt annehmen, man hätte einen Bruch mit einem complexen Nenner zu constr.: man verfährt damit, wie in den folgenden Beispielen.

Es sei $x = \frac{a^3}{b^2 + c^2}$: ich verwandle eins von den Gliedern des Nenners z. B. $c^2$ in ein anderes, welches den Buchstaben b enthält, so daß man $c^2 = bm$ hätte, und folgl. $x = \frac{a^3}{b^2 + bm} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a}{b + m}$.

Ich suche den Werth des Faktors $\frac{a^2}{b}$, und nenne ihn n, welches $x = \frac{na}{b + m}$ giebt; und $b + m$ als eine einzige L. angesehen, suche ich eine vierte Proportionale zu dieser L. und den beiden andern n und a: diese vierte Proportionale ist der Werth von x. Vergleiche § 61.

§ 102. Es sei $x = \frac{f^3c}{a^3 + b^3}$: ich verwandle das Glied $b^3$ des Nenners in ein anderes $a^2n$, dieses giebt

$$x = \frac{f^3c}{a^3 + a^2n} = \frac{f^2}{a} \cdot \frac{f}{a} \cdot \frac{c}{a + n}.$$

Ich suche den Werth von $\frac{f^2}{a}$ und nenne ihn m; ich suche

den Werth $\frac{mf}{a}$ und nenne ihn p; endlich suche ich den Werth von $\frac{pc}{a+n}$, und dieses ist der von x.

§ 103. Es sei $x = \frac{bcd}{g^2 + hk + lm}$: man macht hk = gn, lm = gq, welches giebt

$$x = \frac{bcd}{g^2 + gn + gq} = \frac{bc}{g} \cdot \frac{d}{g + n + q}.$$

Alsdann ist nur noch erforderlich, zuerst eine vierte Proportionale (die ich p nenne) zu den drei Linien g, b, c zu suchen; und nachgehends eine vierte Proportionale zu den drei Linien g + n + q, p und d. Auf eine ähnl. Art verfährt man für die Fälle, wo der Nenner des Bruches eine größere Anzahl von Gl. enthielte, welches übrigens auch die Dimensionen dieser Gl. sein mögen.

§ 104. Wenn der Zähler des Bruches complex wäre, z. B., wenn man hätte $x = \frac{a^3 + bcd - fgh}{pq + hk + rs}$, so würde man diese Größe so schreiben:

$$x = \frac{a^3}{pq + hk + rs} + \frac{bcd}{pq + hk + rs} - \frac{fgh}{pq + hk + rs}.$$

Alsdann ist nur noch erforderlich, wie oben gelehrt worden, alle Theile dieser Größe zu constr. und die Werthe mit den Gliedern des Nenners vorstehenden Zeichen zu vereinigen.

§ 105. Wenn der Werth der unbekannten aus verschiedenen Brüchen zusammengesetzt ist, z. B. wenn man hat $x = \frac{a^3 + c^3 + d^3}{c^2 + d^2 + f^2} - \frac{gh + mn - rs}{t + u}$,

so wird man successive die Werthe von den beiden Theilen der rechten Seite suchen und den Werth des zweiten Theils vom ersten abziehn.

§ 106. Wir bemerken, daß in gewissen Fällen, die sich auf die vorhergehenden zu beziehen scheinen, man verbunden ist, zu den angewendeten Verw. seine Zuflucht zu nehmen. Die Fälle, von welchen ich reden will, sind solche, in welchen der Zähler und Nenner sich in Faktoren von einer Dimension zerlegen lassen.

Es sei z. B. $x = \frac{a^2b - 2amb + m^2b}{a^2 - c^2}$.

Ich bemerke, daß diese Größe dasselbe ist, als

$$x = \frac{b(a-m)^2}{(a+c)(a-c)};\ \text{oder}\ x = \frac{b(a-m)}{a+c} \cdot \frac{a-m}{a-c}.$$

Um also den Werth von $x$ zu haben, ist die Frage zuerst, eine vierte Proportionale (die ich $n$ nenne) zu den drei L. $a + c$, $b$ und $a - m$ zu suchen, und nachgehends eine vierte Proportionale zu den drei L. $a - c$, $n$, und $a - m$.

§ 107. Oefters kann man die Constr. einer rationellen Größe abkürzen und ihr mittelst der Eigenschaften des Kr. und des rechtw. Tr. Eleganz geben. Hier einige Beisp.

§ 108. Es sei $x = \frac{b^2 + bc}{a}$. Ueber $AD = b + c$, als Durchm. (Fig. 43), beschr. ich einen Halbkr. ACD; dann, nachdem man $AB = b$ gemacht und BC prpd. errichtet hat, ziehe ich die beiden Sehnen AC, CD; ich nehme auf der nöthigenfalls verl. CD, $CE = a$, und, nachdem AE gezogen, errichte ich in A auf AE den Perpd. AF, welcher die verl. Sehne DC in F trift; alsdann ist CF der Werth von $x$.

Denn $AC^2 = AB \cdot AD = b(b + c) = b^2 + bc$, und folgl. $AC = \sqrt{(b^2 + bc)}$. Wegen der rechtw. ähnl. Tr. ACE, FCA hat man die Propt.

$EC : AC = AC : CF$, oder $a : \sqrt{(b^2 + bc)} = \sqrt{(b^2 + bc)} : x$;

folgl. $CF = x = \frac{b^2 + bc}{a}$.

§ 109. Es sei $x = \frac{a^2 + b^2}{m}$; ich constr. einen bei C rechtw. Tr. ACD (Fig. 44), dessen Katheten CA = a, CD = b, und folgl. die Hypot. AD = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Auf CD nehme ich CE = m, und nachdem CA nach M zu verl. ist, so daß CM = AD, so ziehe ich ME, auf welcher ich den Perpd. MF errichte, der die verl. DC in F trift; alsdann ist CF der Werth von x.

Denn CM = AD = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, und man hat die stetige Proportion:

$$\div\!\!\div \text{CE} : \text{CM} : \text{CF},$$

also $$\text{CF} = \frac{\text{CM}^2}{\text{CE}} = \frac{a^2 + b^2}{m} = x.$$

§ 110. Es sei $x = \frac{a^2 - b^2}{m}$; ich constr. einen rechtw. Tr. ACD (Fig. 43), dessen Hypot. AD = a, die Kathete CD = b; und folgl. die Kathete AC = $\sqrt{(a^2 - b^2)}$. Ich mache CE = m; ziehe EA, in deren Endp. ich den Perpd. AF errichte, welcher DC verl. in F trift; und CF ist der Werth von x.

§ 111. Es sei $x^2 = (b^2 + c^2) \mp 2cd$. Zeichne einen rechtw. Tr. ACD (Fig. 45 u. 46), in welchem die Kathete CD = d und die Hypot. AC = b. Nimm CB = c und ziehe AB, so ist AB = x.

Bew. $AD^2 = b^2 - d^2$, auch $AD^2 = x^2 - (c \mp d)^2$;

mithin $x^2 - (c \mp d)^2 = b^2 - d^2$;

folgl. $x^2 = b^2 - d^2 + (c \mp d)^2$

$= b^2 + c^2 \mp 2cd.$

§ 112. Man muß bedenken, daß der Ausdruck einer L. nothwendig von einer einzigen Dimension ist. Ist also die Größe, die man giebt, um eine L. vorzustellen, diesem Gesetze nicht unterworfen, so muß man sie darauf zurück

führen, indem man sie mit einer schicklichen **Potenz** von einer willkürlich als Einheit angenommenen Linie **multipl.** oder dividirt. Es sei z. B. $x = \frac{ab}{cd}$, eine Größe, in welcher a, b, c, d, x, jede eine L. ausdrücken. Da der Bruch $\frac{ab}{cd}$ von der Dimension Null ist, oder eine absolute Zahl vorstellt, indem der Quotient des Prod. ab, welches von zwei Dimens., dividirt durch das Prod. cd von derselben Beschaffenheit, nur eine abstracte Zahl sein kann, so giebt es eine L. als Einheit genommen, die man sich hinzu denken muß. Es sei m diese L.; multipl. man den Bruch $\frac{ab}{cd}$ mit m, welches dessen Werth nicht ändert, so haben wir $x = \frac{mab}{cd}$, eine Größe von einer Dimension, die sich, wie wir gelehrt haben, construirt.

Hätte man $x = \frac{b}{c^3 + eg + h}$, so nähme man m als Einheit und brächte diese Größe auf die Form

$$x = \frac{bm^3}{c^3 + egm + hm^2},$$

indem man ihren Zähler mit $m^3$, das zweite Glied ihres Nenners mit m und das dritte mit $m^2$ multiplicirt. Eben so mit andern Größen.

## Allgemeine Construction der Gleichungen vom zweiten Grade.

Alle Gl. vom zweiten Grade können dargestellt werden durch $x^2 \pm ax \pm bc = 0$ oder durch $x^2 \pm ax \pm d^2 = 0$, indem das Rect. bc in ein Qdr. $d^2$ verw. wird Diese Gleich. giebt die vier Formeln:

I. $x^2 + ax - d^2 = 0$, oder $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + d^2)}$.

II. $x^2 - ax - d^2 = 0$, oder $x = +\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + d^2)}$.

III. $x^2 + ax + d^2 = 0$, oder $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - d^2)}$.

IV. $x^2 - ax + d^2 = 0$, oder $x = +\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - d^2)}$.

In den Constr., die wir von diesen Formeln geben wollen, nehmen wir an, daß die pos. Größen von der Linken zur Rechten und daß folglich die neg. Größen von der Rechten zur Linken gehen.

Um die beiden ersten zu constr., zeichne einen in B rechtw. Tr. ABC (Fig. 47), in welchem $BA = \frac{1}{2}a$, $BC = d$, und folgl. $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + d^2)}$. Nimmt man von beiden S. des P. A. die L. AO, AM, MK, jede gl. AB, und MN gl. AC, so haben wir

$$\left.\begin{array}{l} OC = +\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + d^2)} - \frac{1}{2}a \\ AN = -[\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + d^2)} + \frac{1}{2}a] \end{array}\right\} \text{für die erste Formel.}$$

$$\left.\begin{array}{l} MC = +\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + d^2)} + \frac{1}{2}a \\ KN = -[\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + d^2)} - \frac{1}{2}a] \end{array}\right\} \text{für die zweite Formel.}$$

Eben so, um die beiden letzten Formeln zu constr., (in welchen ich annehme, es sey $\frac{1}{4}a^2 > d^2$, damit diese Formeln reel seien). zeichnet einen rechtw. Tr. ABC (Fig. 48), dessen Hypot. $AC = \frac{1}{2}a$, die S. $BC = d$, und folgl. die Seite $AB = \sqrt{(\frac{1}{4}a - d^2)}$. Nehmet jede dieser drei L. AO, AM, MK gl. AB, und die L. MN = AC, so habet ihr

$$\left.\begin{array}{l} KN = -[\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - d^2)}] \\ AN = -[\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - d^2)}] \end{array}\right\} \text{für die 3te Formel.}$$

$$\left.\begin{array}{l} MC = +\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - d^2)} \\ OC = +\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - d^2)} \end{array}\right\} \text{für die 4te Formel.}$$

# Viertes Kapitel.

## Von den unbestimmten Aufgaben mit zwei unbekannten Größen; von den krummen Linien im Allgemeinen.

---

§ 114. Die unbekannten Größen, welche in einer Endgleichung einer unbestimmten Aufg. vorkommen, nennt man veränderliche Größen, weil sie der Veränderung unterworfen, und wenn man einer nach und nach verschiedene Werthe giebt, so haben die andern auch verschiedene correspondirende Werthe. Man nennt beständige Größen diejenigen, die immer dieselben bleiben, während die vorhergehenden sich verändern. Z. B. der Durchm. eines Kr. ist eine beständige Größe und die Perpd. auf diesem Durchm. sind die Sin. der Bogen, die sich mit den Bogen ändern, der Sinus kann also als eine veränderliche Größe angesehen werden. Diese Perpd. bilden eine stetige Reihe, deren allgemeines Gl. wir mit y bezeichnen wollen, schneiden von dem Durchm., je weiter sie vom Anfangsp. des Bogens sich entfernen, immer größere und größere Stücke vom Durchm. ab. Diese Abschnitte geben also auch eine veränderliche Reihe; und wenn man das allgem. Glied dieser Reihe x nennt, so wird x, als eine veränderliche Größe, nach und nach jedes Stück des Durchm., vom Anfangsp. an gerechnet, vorstellen. Will man gewisse Gl aus beiden Reihen auf einander beziehen, so sind unstreitig diejenigen hiezu die bequemsten, die einander in einem P. des Durchm. begegnen.

§ 115. Ein jeder analytischer Ausdruck, in welchem eine veränderliche Größe mit einer oder mehreren beständigen Grß. oder Zahlen in so einer Verbindung stehet, daß man die veränderliche Grß. nicht als einfach sondern als zusammengesetzt betrachtet, heißt eine **Function** der veränderlichen Grß.: $a + 7x$; $bx \pm cx^2$; $27x - a\sqrt{(36 - x^2)}$; $abx^n$; $pq^x$ sind Funktionen der veränderlichen Größe x. Setzt man einen von diesen Ausdrücken einer andern veränderlichen Grß. gl., wie $a + 7x = y$, so wird die veränderliche Größe y durch eine andere veränd. Grß. x und durch Grß., die immer einerlei Werth behalten, (wie hier 7 und a) was auch aus x wird, durch beständ. Grß. bestimmt, und es heißt in dem Falle y eine **Function** von x. Es ist aber auch $x = \frac{y - a}{7}$, oder: x ist auch eine **Function** von y.

§ 116. In der Stelle einer solchen veränd. Grß., kann man nun alle ersinnliche Zahlen oder Grß., pos. und neg., ganze und gebrochene, rationelle und irrationelle, wie auch transcendentische, ja so gar imaginaire oder unmögliche Größen, [deren allgemeinster Ausdruck $a \pm b\sqrt{-1}$ ist], und selbst Null substituiren, um zu sehen, was bei jedesmaliger Veränderung aus der andern veränd. Grß. wird, deren Werthe man niemals ganz erschöpft zu haben glauben darf, wenn man nicht die erste durch alle diese verschiedenen Bestimmungen hat gehen lassen. Es muß also jede Function einer veränd. Grß. selbst eine veränd. Größ. sein, und es muß sich kein bestimmter Werth denken lassen, den die Function nicht darstellen kann, da selbst die unmöglichen Grß. bei der Substitution nicht ausgeschlossen sind.

§ 117. Sind die Grß. in der Funktion so mit einander vermengt, wie es die algebr. Operationen (die Add., Subtr.,

Multipl., Divis., Erhebung zu Potenzen, Ausziehung der Wurzeln, Aufl. der Gleichungen) erfordern; so ist die **Function** oder die **Gleichung**, welche die veränd. Grß. enthält, **algebraisch**. Es hat aber jede algebr. Gleich. einen **gewissen Grad**, den man nach den Abmessungen schätzt, die in der höchsten Potenz einer von den veränd. Größen oder in beider Produkten vorkommen So sind $ay^2 = abx - bx^2$; $xy^2 = a^2$ algebr. Gl. vom **zweiten**, $ay^2 - xy^2 - x^3 = 0$ eine vom **dritten**, und

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + px^{m-r} \ldots$$
$$\ldots + sx^2 + tx + v = y$$

eine algeb. Gleich. vom mten **Grade**. Denn obgleich der Exponent m eine **unbestimmte** Zahl ist, so ist er doch keine **ungewisse** oder **veränderliche** und wird bei gewissen Voraussetzungen eine bestimmte Zahl, die alsdann einen **gewissen** Grad der Gleich. anzeigt.

§ 118. In jeder algebr. Gleich. zwischen x und y gehört zu jedem x eine bestimmte Menge von y, welche durch den höchsten Exponenten von y gegeben ist. Stiege y in der Gleich. auf den mten Grad, so gehörten zu jedem bestimmten Werthe von x, m Werthe von y, darunter auch wohl unmögliche sein können; und gehören also zu einer Reihe von x, m Reihen von y. Eben so, wenn x auf die Potenz n steigt, gehören zu einer Reihe von y, n Reihen von x; denn x kann auch eine Funktion von y sein (§ 115.); für $y^2 = ax$ ist $x = \frac{y^2}{a}$ und $y = \pm\sqrt{ax}$, und hat x für jedes bestimmte y nur einen, aber y für jedes bestimmte x zwei einander entgegengesetzte Werthe Im ersten Falle heißt x eine **einförmige Function** von y. Im zweiten Falle ist y eine **zweiförmige Function** von x. Auch hat man **dreiförmige**, **vierförmige**, u. s. w.

u. s. w. Functionen der veränd. Grß., nachdem x oder y auf den dritten, vierten u. s. w. Grad aufs höchste steigt.

§ 119. Ueberhaupt, wenn A, B, C, D ..... P, Q einförmige Functionen von x sind, so ist $y^2 + Ay + B = 0$ der allgem Ausdruck für alle zweiförmige;

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0,$$

für alle dreiförmige; und

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + Cy^{n-3} + \ldots + Py + Q = 0$$

für alle vielförmige Functionen von x, wenn n eine ganze Zahl. Denn jeder bestimmte Werth von x giebt in dieser Gleich. einen so vielfachen Werth von y, als der höchste Exp. dieses Buchstabens anzeigt. In der zweiförmigen Funct. von x ist $y = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$, und gehört also hier zu jedem bestimmten Werth von x ein doppelter Werth von y, wo beide entweder reell, oder imaginair, auch einer davon Null sein kann. In Ansehung der imaginairen oder unmöglichen Wurzeln ist nur noch zu erinnern, daß sich erweisen läßt, daß, wenn eine Gleich. solche Wurzeln enthält, dieselben allemal paarweise vorhanden sind, so, daß wenn n eine ungerade Zahl, wenigstens eine, oder drei, oder fünf u. s. w. reelle Wurzeln nach den ungeraden Zahlen vorhanden sein müssen; wenn aber n gerade ist, auch alle Wurzeln unmöglich sein können.

§ 120. Außer denen § 117. angezeigten algebr. Oper. giebt es noch andere, welche die Kräfte der gemeinen Algebra übersteigen und daher transcendentische Operationen genannt werden. Dahin gehören die Logarithmischen u. Exponential-Größen, d. i., solche, die einen veränderl. Exp. haben, nebst vielen andern, die zum Theil bei der unbestimmten Bogen- und Winkeltheilung vorkommen, und deren Behandlung größtentheils einem höhern Kalkül vorbehalten ist. Functionen also, in welchen

dergleichen Oper. befindlich sind, sind transcendentisch. Denn in $y^z = x$; $y = \lg . x$; $y = x^{\sqrt{2}}$; $y = a . \mathrm{Cot}. x$ bestimmen die veränderlichen Grß. einander nicht so, daß zwischen den beiden eine algebr. Gleich. Statt haben könnte. Hierher gehören auch die Gl., wie $x = A + By + Cy^2 + ..$ u. s. w. fort, ohne Aufhören. Denn zu jedem x gehört hier nicht, wie bei den algebraischen Gleich. sein muß, (§ 118) eine bestimmte sondern eine unzählige Menge von y; und wird hier durchgängig y eine transcendentische Function von x genannt.

§ 121. Die algebr. Operationen lassen sich, wie bekannt, eben sowohl geom. als arithm. ausführen, da man alle Werthe der veränderlichen Größe in einer unbestimmten gr. L. darstellen kann, weil selbige jede ganze oder gebrochene Zahl, jede Rational- und Irrationalgröße, jede Summe, jede Differenz, jedes Prod., jeden Quotienten, jede Potenz und jede Wurzel vorstellen kann. Man nehme also einen willkührlichen P. A (Fig. 49) in einer Ebene, und lege durch ihn eine unbegrenzte gr. L. dD, so wird sie von ihm in zwei Theilen dergestallt getheilt, daß man diese Theile, da sie sich ins Unendliche nach entgegengesetzten Richtungen strecken, als einander entgegengesetzt betrachten kann. Von diesen entgegengesetzten Theilen AD, Ad, setze man den einen pos., den andern neg. und nehme auf ihnen gewisse bestimmte Längen für bejate und verneinte x, so werden sich alsdann für jeden Werth von x ein oder mehrere Werthe von y ergeben, nachdem nun y eine einförmige oder vielförmige Funct. von x ist (§ 118). Diese Werthe von y sind alsdann die zugehörigen Werthe zu dem bestimmt angenommenen Werthe von x und müssen, da die L. dD die Ebene, in welcher sie liegt, gleichfalls in zwei entgegengesetzte Gegenden, die obere und untere, abtheilt, von dem

Endp. an des zugehörigen x sich nach diesen entgegensetzten Gegenden der Tafel nach Verschiedenheit ihres Ausdruckes strecken. Alles dieses wird in der Folge näher erläutert werden. Hier habe ich nur die Möglichkeit zeigen wollen, algebr. Funkt. durch L. auszudrücken, weil sich eine unbestimmte L. geom. ziehen läßt.

§ 122. Alle Linien werden in reguläre und irreguläre eingetheilt. Diese folgen in ihrem Gange keinem bestimmten oder bekannten Gesetze; wie ein Zug, den man aus freier Hand auf einer Ebene macht Die regul L. hingegen gehen nach einem gewissen festgesetzten beständigen Gesetze fort, nach welchem die Lage aller P in ihnen dergestalt gegeben ist, daß man dieselben aufs deutlichste von denen unterscheiden kann, die nicht zu der L gehören; und dieses Gesetz bestimmt eigentlich die Natur und das Wesen dieser L. Man setze, daß von zwei P. in einer Eb. sich der eine um den andern unbeweglichen dergestalt herumdrehe, daß beider Entfernung dieselbe bleibe, so ist hierdurch die Lage aller P. in der Ebene gegen den unbeweglichen bestimmt gegeben, und der erzeugende Punkt beschreibt eine kr. L., die man die Kreislinie nennt, und die hierdurch von allen andern kr. L. ihrem innern Wesen nach unterschieden ist. Eine solche regul. L. muß sich auch durch eine und eben dieselbe Funct. von x ausdrücken lassen; welches bei einer irregul. L. nicht Statt findet, die das sie erzeugende Gesetz oft augenblicklich ändert, dergestalt, daß, in so fern man sie als aus einzelnen Theilen verschiedener regul. L. zusammengesetzt betrachten kann, diese verschiedenen Theile auch nicht anders als durch verschiedene Funct. von x ausgedrückt werden können. Und in dieser Absicht pflegt man auch oft die regul. L. zusammenhän-

gende und die irregl. unzusammenhängende, vermischte L. zu nennen.

§ 123. Das Gesetz, das eine regul. L. durchgängig befolgt, läßt sich insgemein auf die Beziehung zweier verschiedentlich in oder außer ihr gezogenen L. zurücksetzen, die man als Funct. von einander ansiehet, und deren Verh. für alle P. der L. vermittelst einer Gleich. ausgedrückt werden kann. Ist diese Gleich. algebraisch, (§ 117) so heißt die L. selbst eine algebraische Linie und ist von der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Ordnung, nachdem ihre Gleich. den ersten, zweiten, dritten u. s. w. Grad erreicht (§ 118). In einer solchen Gleich. lassen sich die Funct. x und y durch gr. L. mit Zuziehung der beständigen Größen dergestalt ausdrücken, daß man ihre Verbindung zuletzt auf die Postulate der Elementargeometrie resolviren, und also für jedes willkührlich angenommene x das zugehörige oder die zugehörigen y, und so auch umgekehrt, durch eine geom. Constr. finden kann. Wären aber für eine gegebene L. die x und y oder eines davon keine gr. sondern kr. L.; oder wenn sie gr. wären, und man müßte, ihre Länge auszudrücken, Kreisbg. oder irgend eine andere Grß., die man in der Elementargeometrie nicht hat messen lernen, zu Hülfe nehmen; so ließe sich für diese L. keine bestimmte algebraische wohl aber eine transcendentische Gleichung angeben, und die L. wäre alsdann selbst eine transcendentische Linie.

§ 124 Dieses zu erläutern, richte man auf einem Durchm. AB (Fig. 50), über den man einen Halbkr. ACB gezeichnet, in bel. P. P unbestimmte Perpd auf, die die Periph. in C schneiden. Nimmt man nun durchgängig einen Prpd. PM dem zugehörigen Bg. AC gl., (ich untersuche hier nicht, wie das geom. geschehen könne) so würde die durch alle P. M ge=

hende L. AMD nach einem einförmigen beständigen Gesetze sich krümmen, und also zwar eine regul. aber transcendentische Linie sein, weil sich für AP = x ihr Verh. zu dem zugehörigen Bog. AC oder dem ihm gleichen PM, als dem correspondirenden y, auf keinerlei Weise algebr. angeben läßt.

§ 125. Wollte man den Bog. AC aus seinem Sin PC bestimmen, und hierdurch einen Ausdruck für PM zu finden suchen, so würde diese Bestimmung nichts enthalten, was sich nicht zugleich auf unendlich viele Bog. anwenden ließe. Denn CP ist nicht allein der Sin. des Bog. AC, sondern auch das Supplement CB, ja sogar der Sin. zu unendlich viel Bog. Denn, wenn die ganze Peripherie = P; so ist Sin. P = 0 und eben so Sin. 2P; Sin. 3P ꝛc. = 0; folgl. müssen P + AC; 2P + AC; nP + AC, und eben so P + BC; 2P + BC; nP + BC, so klein oder groß man auch die ganze Zahl n annimmt, einem und eben demselben Sin. CP zugehören, der allemal, was die Größe betrifft einerlei und dem Zeichen nach, in gewissen Fällen unterschieden ist. (Ich verweise deshalb auf meine Geom. nach Erzeugung der Begriffe ꝛc.). Eben solche Mannigfaltigkeit findet auch bei der Chorde, als dem doppelten Sin., und bei den übrigen trigon. Linien, in Absicht auf die Bg., Statt; oder, welches einerlei ist, der Bog. ist eine transcendentische Function von gedachter trigon. L., und es läßt sich also auf keinerlei Weise zwischen ihnen eine algebr. Gleich. finden. Funct., in welchen dergl. Ausdr. vorkommen, sind also allemal transcendentisch, wie y = a Sin. x, y = a. Cot. x ꝛc. Denn weil zu Sin. x, Cot. x unendlich viel Bog. gehören, so ist y eine unendlichförmige Function von x, oder die Ordinate, so wie andere gr. L., schneidet die kr. L. in unendlich viel P. Hierdurch nun sind diese L. so wesentlich von den algebr. unterschieden, daß man auch umgekehrt,

wenn aus dem Erzeugungsgesetze einer kr. L. klar ist, daß eine gr. L. in unendlich viel P. sie schneiden kann, sicher auf eine transcendentische L. schließen darf. Man kann also eine transcendentische L. als eine L. von einer höhern Ordnung, als irgend eine algebr., als eine Linie von einer unendlichen Ordnung ansehen (§ 120)

§ 126. Die transcendentischen Linien werden auch bisweilen mechanische, so wie die algebraischen, geometrische genannt; bei welcher Benennung man nicht so wohl auf die Leichtigkeit und Genauigkeit ihrer Beschreibung, als vielmehr auf ihre Gleich und auf die Gestalt derselben zu sehen hat. Denn viele von den mechanischen lassen sich nicht allein leichter und bequemer sondern auch oft genauer als die geom. verzeichnen, und die Aufg., die davon abhangen, dadurch viel schärfer lösen.

§ 127 Noch ist anzumerken, daß alle kr. L entweder endlich oder unendlich oder gemischt sind. Eine kr. L. heißt unendlich, wenn sie der Raum, auf der Seite, wo ihre Schenkel liegen, auf keine Weise begrenzen läßt. Exempel hiervon sind die Parabel und Hyperbel. Eine endliche L. hingegen liegt ganz in einem endlichen begrenzten Raume, ihre Aeste mögen sich nun schlechtweg in einander verlaufen, wie bei den Kr., den Ellipsen, oder mögen sich, ehe sie in einander laufen, in einem oder mehreren P. einander schneiden, wie bei dem Zuge einer Achte u. d. m. geschiehet. Gemischte L. sind, deren Aeste sich, nachdem sie sich verschiedentlich durch einander geschlungen und einen oder mehrere Räume begränzt haben, von da aus ohne Aufhören und über alle Grenzen hinaus erstrecken.

§ 128. Bei diesen kr. L., den transcendentischen und geometrischen, wird hier vorausgesetzt, daß sie mit allen ihren

Theilen in einer und eben derselben Ebene liegen und also von denen unterschieden sind, in welchen der sie erzeugende P. aus einer Ebene in die andere geht. Jene werden ebene oder L. von einer einfachen Krümmung, so wie diese, L. von einer doppelten Krümmung genannt; dergl. man auf einer Kugelfl. beschr. kann, oder ein Zirkel, dessen einen Schenkel man auf einer kr. Zyl.- oder Kegelfl. herumbewegte, indem der andere Schenkel auf eben dieser Fläche feststände, nothwendig allemal beschreiben müßte.

§ 129. Wenn man für eine L. einen analytischen Ausdruck finden will, so muß man ihn entweder unmittelbar aus ihrer Erzeugung herzuleiten oder irgend eine bekannte Eigenschaft derselben vermittelst einer Gleich. auszudrücken suchen. In einem Kr. z. E. ist bekanntermassen ein Prpd. aus einem P. der Periph. auf den Durchm. die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten dieses Durchm., oder es ist (Fig. 51) $Ad : dD = dD : dB$, d. i. wenn der unveränderliche Durchm. $AB = a$; $Ad = x$; $dD = y$, also $dB = a - x$ als veränderliche Grß.,

$$x : y = y : a - x \text{ oder } y^2 = ax - x^2$$

eine Gl. für den Kr. In dieser Gleich. wird y allemal durch die veränd. Grß. x und die beständige a bestimmt, und es ist also y eine Funct. von x (§ 115) und zwar eine algebr. Funct. (§ 117), denn es gehöret zu jedem x eine bestimmte Menge von y (§ 118). Auch haben die zusammengehörigen x und y (§ 114) eine beständige unwandelbare Beziehung auf einander, so, daß sich die Gleich. noch anwenden läßt, wenn auch x nach der Reihe die Werthe Ag, Ae, AC, Aδ und y die Prpd. Gg, Ec, KC, Δδ ausdrückt, denn dD ist willkührlich aus der Reihe der Perpd. gewählt worden.

§ 130. Wenn sich x in der Gl. ändert, so muß sich y auch ändern; denn a ist unveränderlich. Doch kann es zuweilen geschehen, daß zu verschiedenen x einerlei y, wie hier dD, Δδ als gl. große y zu x = Ad und x = Aδ, und also zu verschiedenen x gehört, wenn die P. d, δ gleichweit von A und B entfernt sind. Eben dieses zeigt auf die Gleichung.

Denn, wenn man den Durchm. AB in n gl. Theile theilte, so wären $\frac{1}{n}a$ und $\frac{n-1}{n}a$ solche Stücke des Durchmessers, deren Theilungsp. gleichweit von den Endp. des Durchm. entfernt wären.

Nähme man nun in der Gleichung erst $x = \frac{1}{n}a$ und hernach auch $x = \frac{n-1}{n}a$, so käme in beiden Fällen $x = \frac{a\sqrt{(n-1)}}{n}$, und also für verschiedene x einerlei y.

§ 131. In der Gleich. $y^2 = ax - x^2$ ist y eine zweiförmige Funct. (§ 118) von x, und es gehören also zu einem x zwei y, weil $y = \pm\sqrt{(ax - x^2)}$. Also gehören hier zu jedem Ad zwei gl. dD, die, wegen der Verschiedenheit ihrer Zeichen, einander entgegengesetzt sind, und also auf verschiedenen Seiten ihres Durchm. liegen müssen. (§ 121).

§ 132. In dieser Gleich. vertausche man x und y mit einander, und setze a = 10; so kommt, nach gehöriger Vorsetzung, $y^2 = 10y - x^2$. Hier ist $y = 5 \pm \sqrt{(25 - x^2)}$ für pos. und neg. x einerlei, weil x quadratisch ist, und eine Reihe von x giebt zwei Reihen von y, deren Glieder durch $5 + \sqrt{(25 - x^2)}$ und $5 - \sqrt{(25 - x^2)}$ allgemein gegeben sind. Setzt man nun nach und nach

$x = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 5:$

so ist

$$y = \begin{cases} 10;\ 9{,}898;\ 9{,}582;\ 9;\ 8;\ 5;\ \text{aus}\ 5+\sqrt{(25-x^2)}, \\ 0;\ 0{,}102;\ 0{,}418;\ 1;\ 2;\ 5;\ \text{aus}\ 5-\sqrt{(25-x^2)}. \end{cases}$$

Nun nehme man (§ 121) einen P. A (Fig. 52) in einer gr. L. tT, und trage auf sie, nach einer willkührlich angenommenen Einheit = AP, die vorhin angezeigten doppelten Werthe von x nach entgegengesetzten Seiten von A; so gehört z. E. vor die pos. Werthe von

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | x = 0; | + 1; | + 2; | + 3; | + 4; | + 5; |
| oder | = A; | AP; | AQ; | AR; | AS; | AT; |
| ein y der 1. Reihe | = AB; | PL; | QD; | RE; | SF; | TK; |
| u. ein y der 2. Reihe | = 0; | Pl; | Qd; | Re; | Sf; | TK; |

wenn man die y durch Perpd. auf den Endp. der zugehörigen x ausdrückt, deren Länge man aus den beiden obigen Zahlenreihen für y nach der angenommenen Einheit AP bestimmt. Eben so große doppelte y gehören zu gl. großen neg. x; oder Ap, Aq, Ar, As, At; und liegen alsdann alle Endp. der aufgetragenen y in einem Kreise, dessen Durchmesser AB = 10 ist. Dieses zu erweisen, ziehe man fO || AS; und setze AS = x = Of und Sf = y = OA, so ist OB = AB − AO = 10 − y, und aus AO : Of = Of : OB, d. h. y : x = x : 10 − y ergiebt sich $10y - y^2 = x^2$, oder $y^2 = 10y - x^2$, daß also die Fig. nothw. ein Kr. sein muß, weil diese Voraussetzung die Gleich. wiedergegeben, und x und y willkührlich angenommen worden.

§ 133. Auf diese Art können noch mehrere P. der Kreislinie gefunden, und sie, wenn die y nur nahe genug liegen, ziemlich genau verzeichnet werden. Die Nähe der y beruhet aber auf den angenommen Werthen von x, die hier auf beiden Seiten von A in arithm. Progression fortgehen, welches insgemein zu geschehen pflegt, wenn nicht besondere Absichten oder eine größere Bequemlichkeit an-

rathen, diese Werthe anders anzunehmen. So konnten im vorigen Exp., für $x = \pm 1$; und $\pm 2$; die Werthe von $y$ nicht genau in Zahlen angegeben werden, weil so wohl $\sqrt{(25-1)}$ als $\sqrt{(25-4)}$ Irrationalzahlen sind, denen man sich zwar durch Approximation unendlich nähern, die man aber niemals der Wahrheit ganz gemäß erreichen kann. Wollte man nun lauter Rationalzahlen für $y$ haben, so müßte man die arithm. Progression verlassen und gewisse besondere Bestimmungen für $x$ wählen, deren Erfindung aus der unbestimmten Analysis begreiflich wird. Man bedient sich nämlich hierzu der sogenannten diophantischen und ähnlicher Methoden, die die Analysten in dieser Absicht ausgedacht haben, die aber nicht allgemein und oft zu sehr auf besondere Fälle eingeschränkt sind, als daß ich ihrer hier erwähnen könnte.

§ 134. Der Werth $x = \pm 5$ ist auf beiden Seiten von A die Grenze, über die sich $x$ nicht erstrecken darf. Denn jede andere Zahl, die nicht auf diese Grenze oder innerhalb derselben fällt, in $\sqrt{(25-x^2)}$ anstatt $x$ substituirt, macht die Größe unter dem Wurzelzeichen neg. und $\sqrt{(25-x^2)}$ so wie folglich auch den ganzen Ausdruck $5 \pm \sqrt{(25-x^2)}$ unmöglich, daß es also für solche $x$, über $+5$ und $-5$ hinaus, keine $y$, das ist, keinen P. der kr. L giebt.

§ 135. Man setze $y^2 - 10y + x^2 = 0$. Diese Gleich. wird keine anderen Divisoren als die beiden irrationellen Faktoren $y - 5 - \sqrt{(25-x^2)}$ und $y - 5 + \sqrt{(25-x^2)}$ haben, welche in einander multiplicirt, die Gleich. wiedergeben. Und diese Irrationalität, in so fern sie die veränd. Grß. $x$ mit afficirt, ist ein zuverläßiges Zeichen, daß sie beide zu einer und eben derselben L. gehören; dahingegen, wenn diese Divisores rationell wären, beide verschiedenen L.

zugehörten. Der Faktor $y - 5 - \sqrt{(25 - x^2)} = 0$ drückt zwar nur die obere Hälfte *EBDK, so wie der Faktor $y - 5 + \sqrt{(25 - x^2)} = 0$ die untere **AdK, aus; aber beide gehören zu einem und eben demselben Kreis *AKB als einer einzigen kr. L. Auch wird man nicht im Stande sein, nur eine einzige Hälfte des Kr. oder sonst einen Theil irgend einer zusammenhängenden L. in einer rationellen Gleich. darzustellen.

§ 136. Die einfachste und bequemste Methode, deren man sich insgemein bedient, eine jede Gleich., in welcher nur zwei veränd. Grß. befindlich sind (und mehrere kommen hier nicht vor), geom. auszuführen, besteht darin, daß man die Lage aller P in ihr auf zwei verschiedentlich gezogene gr. L. zu beziehen sucht, die mit ihr in einer Eb. liegen. Man zieht nämlich auf einer ebenen Fläche zwei unbegrenzte gr. L. BC, DE, die sich in A unter einem gegebenen oder beliebigen W. DAC schneiden (Fig. 53). Hierauf gebe man der einen veränd. Grß. in der Gleich., wie x, nach und nach verschiedene bestimmte Werthe, die man auf BC von beiden Seiten des P. A aufträgt, wie AF, AG und Af, Ag, von welchen die beiden letzteren neg. sind, wenn die erstern pos. angenommen worden: so wird alsdann, für ein bestimmtes x in der Gleich., wenn y nicht unmöglich wird, dieses y einen oder mehrere bestimmte Werthe erhalten, deren Grß. die Geom. finden, und der Kalculus ihren Zeichen nach beurtheilen lehrt. Diese gefundenen Werthe von y trage man auf die L. DE, von beiden Seiten des P. A, nachdem sie pos. oder neg. sind, dergestalt, daß, wenn man die erstern in der obern Gegend von A nach D zu anmerkt, die letztern, in die untere entgegengesetzte, von A nach F zu abgeschnitten werden. Zieht man nun durch die Endp. der anfangs willkührlich auf der Linie BC

angenommenen x, Prlln. mit DE, auf welchen die y aufgetragen worden, und wiederum durch die Endp. der gefundenen y Prllen mit BC, so werden je zwei und zwei dieser Prllen. für die zusammengehörigen x und y einander schneiden, und dadurch P. bestimmen, die in einer gr. oder kr. L. liegen, die durch die Endp. aller y gehen wird. Das ist zugleich die versprochene Erläuterung zu § 121.

§ 137. Wäre die Gleich. $xy = a^2$ oder $y = \frac{a^2}{x}$ gegeben, so gehörten zu pos. x, wie AF, AG (Fig. 53), die pos. y, FI, GL, und eben so zu neg. Af, Ag die neg. fi, gl, und wären also die Endp. I, L, i, l, der y zugleich P. der kr. L. MNOP, in welcher x und y einförmige Funct. von einander sind. Wäre aber in einer Gleich. y eine vielförmige Funkt. von x, so gehörten auch zu einem x mehr Werthe von y (§ 118). So gehören § 132 (Fig. 52) die P. $\varkappa$, $\Phi$, E, $\Delta$, $\Lambda$, B, L, D, E, F, K und $\varkappa$, $\varphi$, $\varepsilon$, $\delta$, $\lambda$, A, l, d, e, f, K zwar zu verschiedenen Reihen von y, aber doch zu einer Reihe von x, und zu einer kr. L., die die Endp. aller y enthält, wenn x durch alle mögliche Werthe geht.

§ 138. Die L. BC (Fig. 53), auf welcher man die Werthe der einen veränd. Grß. abschneidet, wird die Abscissenlinie, die Abscissenaxe, und die andere DE die Ordinatenaxe genannt. A heißt der Anfang der Abscissen, und jedes Stück wie AF, Af, wird eine Abscisse, so wie das zugehörige FI, fi, eine Ordinate oder Applicate, und Abscisse und Ordinate zusammen, Coordinaten genannt, welche nach Beschaffenheit des W., den sie einschließen, rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten sein können. Ein Prllgrm., wie AI, heißt das Prlgrm. der Coordinaten. Nimmt

man die Lage der pos. und neg. Absc. und Ordin., wie § 136., so kann man auch die vier W. bei A bestimmt ausdrükken. Denn alsdann ist DAC der Winkel der pos. Coordinaten, BAE der Winkel der neg. Coordinaten, DAB der Winkel der pos. Ordinaten u. der neg. Absc., CAE der Winkel der pos. Absc. und neg. Ordinaten. Die beiden erstern nennt man auch oft zusammen die Winkel der Coord. von einerlei Zeichen, so wie die letztern die Winkel der Coord. von verschiedenen Zeichen. Die L. BC, DE, machen mit einander das sogenannte analytische Kreuz aus.

§ 139. Hieraus übersieht man nun leicht, in welche W. die Reihen der Ord. für willkührlich angenommene Absc. gehören, indem man nur auf die Zeichen der Coord. und ihre Verbindung Acht zu geben hat. Noch ist zu erinnern, daß man insgemein die Absc. durch x, die Ord. durch y, ausdrückt. Ich sage insgemein; denn an sich ist das völlig gleichgültig, daß man also auch in der gegebenen Gleich., diejenige, welche von beiden veränd. Grß. man will, für die Absc. oder Ord. annehmen kann.

§ 140. Aus dem, was von der Art und Weise, die Gleich. geom. auszuführen, gesagt worden, ist offenbar, daß es keinen P. der kr. L. giebt, der sich nicht aus der Gl. bestimmen ließe, weil man alle nur möglichen Werthe der einen von beiden unbekannten Grß. in einer Reihe von Absc. darstellen, und aus ihnen, mit Zuziehung der bekannten Grß., alle correspondirenden Werthe der andern unbekannten Grß. durch eine oder mehrere Reihen der Ordin. ausdrücken kann, die mit den angenommenen Absc. zu einerlei L. gehören. Ueberdies zeigt auch die Behandlung der Gleich. selbst, bei ihren Mannigfaltigkeiten, die wunderbarsten Eigenschaften der kr. L., die auch den schärf-

sten Sinnen entfliehen würden, und die nur das geübtere analytische Auge entdeckt, oft auf einem solchen Wege entdeckt, der selbst für die gemeine Algebra unwegsam oder doch nicht gebahnt genug ist. Und in dieser Absicht kann man mit vielem Rechte die Gleich. eine Erkl der L. nennen, die die Natur derselben vollkommen erschöpft. Denn es wird eine L. durch ihre Gleich. nicht allein von allen andern wesentlich unterschieden, sondern man kann auch aus ihr alles herleiten, was der L. entweder schlechterdings, oder unter gewissen Bedingungen oder Voraussetzungen zu kommt, und was zu ihrer Erzeugung und Beschreibung nöthig ist.

§ 141. In der Gleich. $y^2 = 10y - x$ (§ 132) war tT (Fig. 52) die L. der Absc. x, mit dem Durchm. ϰK vrll. Gesetzt man wollte diesen Durchm. zur Abscissenaxe machen und den Anfang der Absc. aus A in ϰ verlegen, so wären, wenn hier AQ, QD, die ersten Coord. x, y für D sind, ϰg, gD die zweiten neuen Coord. u, z für eben diesen P. Nun ist aber AQ = Cg = ϰg = ϰC oder $x = u - 5$ und $QD = gD + gQ$ oder $y = z + 5$. Diese Werthe in obige Gleich., anstatt x, y substituirt, giebt für die neuen Coord. u, z, die Gleich. $z^2 = 10u - u^2$, wie § 129, weil beide sich auf einerlei Coordinaten beziehen.

Aus $z^2 = 10u - u^2$ wird $u^2 = 10u - z^2$, daß also die neugefundene Gleichung von der ersten angenommen, $y^2 = 10y - x^2$ keinesweges unterschieden ist. Die versch. Coord. AQ, QD; und ϰg, gD für einen P. D, kann man nämlich aus einer einzigen von ihnen herleiten, wenn man die unbekannte Grß. in der Gleich., die man erst für die Absc. annimmt, in dem andern Falle für die Ordn. ansieht, und so auch umgekehrt, d. i., wenn man die Coord. x, y, oder u, z mit einander verwechselt (§ 139).

§ 142. Wollte man aber den Anfang der Absc. in den Mittelp. C des Durchm. $\times K = 10$ setzen, so wären Cg, gD die Coordinaten w, z für den P. D, und $\times g = Cg + 5$ oder $n = w + 5$, und also, da z für beiderlei Coord. einerlei bleibt, $z^2 = 25 - w^2$; welche Gleich. von den vorigen wahrhaft unterschieden ist, und wo der Anfang der Absc. allemal in den Mittelp. des Durchm. zu liegen kommt, man mag w oder z für die Absc. annehmen.

§ 143. Wollte man endlich den Anfgsp. A außer dem Kreis nehmen (Fig. 54) und seinen P. D auf die rechtw. Coord. AP, PD, die hier s, t heißen mögen, beziehen; so ist AP gl. und prll. Bg, auch ist $AF = CB = a$; und $gP = CF = b$; denn sie können beide als bekannt angesehen werden, weil die Lage des Mittelp. C gegen die angenommenen Coord. gegeben ist. Die vorigen Coord. Cg, gD, in den Werthen der neuern AP, PD ausgedrückt, geben Cg oder $w = s - a$ und gD oder $z = t - b$, und beides in die Gl. $z^2 + w^2 = 25$ gehörig substituirt, giebt die neue Gleich. $(s - a)^2 + (t - b)^2 = 25$ oder

$$s^2 - 2as + a^2 + t^2 - 2bt + b^2 = 25$$

für die Coord. AP, PD, die von der vorigen gar sehr verschieden ist, aber, wie sie, nicht nur für den P. D, denn dieser ist willkührlich gewählt worden, sondern für alle P. des Kr. gilt.

§ 144. Wenn man in diesen Gleich. die Coord. durchgängig durch x, y ausdrückt und $5 = r$ setzt, so kommen hier drei verschiedene Gleich. für den Kr.:

1) $y^2 = 2rx - x^2$ (§ 141),

2) $y^2 = r^2 - x^2$ (§ 142) und

3) $y^2 - 2ay + x^2 - 2bx = r^2 - a^2 - b^2$ (§ 143),

von welchen die letzte die erstern in sich enthält und durch gewisse Voraussetzungen verschiedentlich verändert werden

kann. Bei allen Veränderungen behält aber doch die Gl. immer eben denselben Grad; ja, es läßt sich allgemein erweisen, daß jede L., man mag ihre Axen verändern und den Anfang der Absc. nehmen, wie und wo man will, an einen bestimmten unveränderlichen Grad gebunden ist; wie man schon daraus übersehen kann, weil in der Gleichung zwischen den neuen Coord. an die Stelle der ersten durchgängig nur solche Grß. gesetzt werden, die gleichfalls nur einzige Abmessung haben.

§ 145. Nach dieser Bemerkung, die in der Algebra von sehr erheblichem Nutzen ist, darf man also aus der verschiedenen Gestalt der Gleich. von einerlei Grade nicht sogleich auf die Verschiedenheit der L. schließen. So drückt $y^2 + x^2 = px + qy$ eben so wohl die Natur des Kr. aus als die vorige Gleich., so sehr auch jede von ihr unterschieden ist. So wie es nämlich von einerlei Sache verschiedene Erkl. geben kann, so kann man auch einerlei L. in verschiedenen Gleich. ausdrücken, deren jede die L., gleichsam aus einem gewissen Gesichtsp. betrachtet, darstellt. Ein geschickter Analyst weiß allemal unter den möglichen diejenigen herauszuheben, die zu der vorgesetzten Absicht die bequemsten sind.

§ 146. Man kann sich den Gang einer kr. L. durch die Bewegung eines P. vorstellen, der nach und nach in ihre verschiedene Stellen rückt, jedoch so, daß er seinen Weg beständig ändert, d. i. in jedem Augenblicke von der Richtung im nächstvorhergehenden Augenblicke abweicht. Man kann also überall P. in der L. annehmen, und es wird kein endlicher bestimmter Theil derselben eine gr. L. ausmachen. Wenn man aber die Stelle, in der sich ein P. jetzt befindet, und die Stelle, in die er den nächsten Augenblick rückt, als eine Entfernung ansieht, die der P. in der augenblicklichen

lichen Bewegung zurücklegt: so hat es nichts widersprechendes, sich den Weg des P. in dieser Entfernung als eine obgleich unendlich kleine gr. L. vorzustellen, weil sich die Richtung desselben nicht ändern kann, wenn man nicht zugleich annimmt, daß er vorher in dieser kleinen Entfernung einerlei Richtung gehabt hat. Und hierauf gründet sich die ungemein fruchtbare Idee der neuern Meßkünstler, nach welcher sie die kr. L. als Polygone von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten, die bloß durch die W., die diese unendlich kleinen Seiten einschließen, unterschieden sind. Die Veranlassung hierzu hat Archimedes gegeben, der zuerst die Schranken der Kreisperipherie durch die umzuschreibenden Polygone zu bestimmen gewiesen hat. Der weitere Verfolg dieser Aussicht hat gelehrt, daß, wenn man die Seiten dieser Polygone unendlich vervielfältigt, sie sich in den kr. L. verlieren, dergestalt, daß man ihre Summe allemal für die krumme L. selbst annehmen kann. Leibnitz hat diese Methode zur höchsten Vollkommenheit gebracht, und gezeigt, wie selbige auf algebraische sowohl als transcendentische L. gleich bequem angewendet werden könne.

§ 147. Seitdem Cartesius die kr. L. in Gleich. auszudrücken und aus ihnen die Eigenschaften derselben analytisch herzuleiten gezeigt hat, hat man sich mit nachfolgenden Untersuchungen und Aufg. vorzüglich beschäftiget. 1) Wie man eine L., deren Gleich. gegeben ist, beschr., oder im Gegentheil, wenn ihre Beschreibung bekannt, wie man daraus eine Gleich. für sie erfinden soll. 2) Wie man an einen jeden P. der kr. L. eine Tang. ziehen könne, welche nach dem, was vorhin ist erinnert worden, nichts anders als eine endliche Verlängerung der unendlich kl. Polygonseite an dem gegebenen P. ist. 3) Wie man einen

Perpd. oder eine Normale auf einen gegebenen P. der kr. L. ziehen soll. 4) Wie man die Krümmung in einem gegebenen kl. Bogen oder P. bestimmen könne, indem man dieselbe mit einer Kreiskrümmung zu vergleichen sucht, die mit der gegebenen einerlei ist, und also die Aufg. ganz auf die Erfindung des Halbm. dieses Kr. auf der Normale zurücksetzt, den man auch dieserwegen den Halbm. der Krümmung, Radium Curvedinis, Radium Osculi zu nennen pflegt. 5) Wie man den Raum finden und quadriren könne, den entweder eine in sich selbst zurücklaufende L. einschließt oder der zwischen den Bog. einer kr. und einer oder mehrerer gr. L. enthalten ist nebst der Untersuchung, wie man einen Ausdruck für die Länge eines Bog. oder der ganzen kr. L. finden, d. i., sie rectificiren könne, nebst verschiedenen andern Betrachtungen zu Erfindung der Wende- und Rückkehrpunkte, der größten und kleinsten Ordin. u. s. w., die ich hier mit Stillschweigen übergehe.

§ 148. So viel von der Art und Weise, wie man die kr. L. in der neuern Analysis zu betrachten pflegt, und von den hauptsächlichsten Aufg., die bei ihnen vorkommen und welche bei ihrer Mannigfaltigkeit und Allgemeinheit die angenehmsten und lehrreichsten sind. Diese Untersuchungen setzen aber gründliche Einsicht in die Arithm. und Buchstabenrechnung, Geom. und Trigonometrie nebst der Behandlung der Gleich. voraus. Die Methoden der Erfindung gründen sich auch insgesammt auf die freundschaftliche Verbindung dieser Wissenschaften, durch welche überhaupt der Weg zu einem Theile der erhabensten Kenntnisse geöffnet wird.

§ 149. In diesem und den folgenden Kapiteln werden die Eigenschaften solcher L. betrachtet, durch welche ein Theil der unbestimmten Aufg. geom. gelöst werden kann.

Wenn sich aus den Bedingungen einer Aufg., die mehr als eine unbekannte Grß enthält, so viel verschiedene von einander unabhängige Gleich. herleiten lassen als unbekannte Grß. sind, so wird die Aufg. bestimmt genannt; denn alle diese Gleich. geben für jede der unbekannten Grß. eine einzige bestimmte Gleichung. Wenn aber die Bedingungen der Aufg. wenigere Gleich. geben, als unbekannte Grß. vorhanden sind, so ist die Aufg. unbestimmt, und es ist erlaubt, eine oder mehrere von den unbekannten Größen nach Willkühr zu bestimmen, um daraus den Werth der übrigen zu übersehen. So ist die Forderung, aus der gegebenen Grdl. und Höhe einen Tr. zu machen, eine unbestimmte Aufg.; denn es giebt keine bestimmte sondern eine unendliche Menge solcher Tr., deren Spitzen über der Grdl. insgesammt in einer L. liegen, die mit der gemeinsch. Grdl. prll. geht und von ihr um die gegebene Höhe entfernt ist. Diese Prlle. wird hier der Ort der Spitzen, der Ort der unbestimmten geom. Aufg. genannt.

§ 150. Die Alten gaben nämlich denen L., in welchen jeder P. gl. geschickt ist, eine unbestimmte geom. Aufg. zu lösen, den Namen eines geom. Orts; und nannten ihn, nach Verschiedenheit der L., die die Aufg. erfordert, einen Ort an einer gr L., einen Ort an einem Kreis, an der Parabel, Ellipse, Hyperbel, u. s. w. Der Ort an einer gr. L heißt bei ihnen so wie der Ort an einem Kr. ein ebener Ort; jener auch öfters ein einfacher Ort. Jede L. der zweiten Ordnung (§ 123), mit Ausschließung des Kr., heißt ein körperlicher Ort, weil diese L. aus einem Kegel, als einem Körper, sich schneiden lassen. Die L. höherer Ordnungen, von denen sie nur wenige und auch diese nicht so genau, wie wir

jetzt, kannten, nannten sie mit einem gemeinsch. Namen Linien-Oerter.

§ 151. Gesetzt, ich wollte einen rechtw. Tr. auf eine gegebene Hypot. AB (Fig. 55) setzen: so kommt es hier bloß darauf an, den P. zu bestimmen, in welchem die beiden Katheten über der Hypot. zusammenstoßen. Ich entwerfe mir also willkührlich einen Tr. ABC und nehme unterdessen an, daß der W. ACB ein rechter ist. Die Betrachtung dieses rechtw. Tr. führt mich sehr leicht auf den Satz, daß ein Perpd. CD aus dem rechten W. auf die Hypot. AB eine mittlere Proportionale zwischen den Segm. AD, DB sei, oder daß

$$AD : DC = DC : DB.$$

Nun ist AB gegeben, aber AD, DC sind unbekannt. Setzt man also $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$, so ist $DB = a - x$, und $x : y = y : a - x$ oder $y^2 = ax - x^2$ die Gleich. für einen Kr. (§ 129), die mir zu erkennen giebt, daß die Spitze C des rechten W. ABC in jedem P. einer Kreisperipherie liegen könne, die die gegebene Hypot. AB zum Durchm. hat. In allen diesen P. ist nämlich C ein W. im Halbkr. und folglich ein rechter W. Hieraus erhellet zugleich einigermaßen die Vortrefflichkeit der analytischen Methode, nach welcher die Aufl. der Aufg. sogleich allgemein gegeben ist, sobald man nur die Bedingungen derselben in Gleich. ausgedrückt hat.

§ 152. Ehe ich weiter gehe, muß ich folgende Erinnerung vorausschicken. Wenn man in einer Gleich. die Absc. $= 0$ setzt, so schneidet die L. irgendwo die Axe der Ord.; setzt man in ihr die Ordinate $= 0$, so schneidet sie die Axe der Absc. In beiden Fällen kann die L. diese Axe mehr als einmal schneiden, so vielmal nämlich, als es Werthe für die eine veränderliche Grß. giebt, nachdem die andre

$= 0$ gesetzt worden. Wird aber in der Gleich für $x = 0$ auch $y = 0$, so ist 0 wenigstens eine Wurzel der Gleich. und haben hier beide Coordin. keine Länge, d. i. sie verwandeln sich in einen P. und die kr. L., die durch den Endp. jeder Ordn. geht (§ 136), geht hier zugleich durch den Anfgsp. der Absc., als den einzigen P., den beide Axen mit einander gemein haben. Von der Art sind alle L., deren Gleich. kein Glied haben, in welchem nicht eine von beiden oder beide veränderliche Grß. befindlich sind; wie die Gleich. für den Kr. $y^2 = ax - x^2$ und andre mehr.

§ 153. Gesetzt, man hätte aus den Bedingungen einer Aufg. die Gleich. $y = \frac{bx}{a} + c$ erhalten, so fände man die L. für sie folgendergestalt: man ziehe eine Abscissenlinie CD (Fig. 56) und nehme in ihr A für den Anfang der Absc, so findet man für die willkührlich angenommenen Absc. (x) AP, AQ die zugehörigen Ordn. (y) PM, QN, die man unter dem gegebenen oder angenommenen Coordinatenwinkel EAD an das Ende der zugehörigen Absc. aufträgt. Für $x = 0$ wird $y = c$, und schneidet also die L. die Ordinatenaxe in der Entfernung $AB = c$. Für $y = 0$, wird $x = \frac{-ac}{b} = AO$, oder die L. schneidet in der Weite AO auch die Abscissenaxe. Also sind O, B, M, N, die Endp. der Ordn. zu den Absc. AO, 0, AP, AQ zugleich P. der gesuchten L.; auch verh. sich $AB : AO = c : \frac{ac}{b} = b : a$.

Nun verbinde man je zwei und zwei von diesen P. mit einer gr. L., so müssen die L. OB, BM, MN zusammen entweder eine einzige gr. L. ausmachen oder als eine gebrochne L. einzelne Sehnen zu einer kr. L. abgeben, welche

durch die P. O, B, M, N, durchgehet. Dieses zu übersehen, mache man aus der Gleich die Propt.

$y - c : x = b : a$ und ziehe durch B mit der Absceißenl. CD eine Prlle. GH, die die Ord. in S, T schneidet, so ist $PS = QT = AB = c$; $BS = AP$; $BT = AQ$; und W. $BSM =$ W. $APM =$ W. $AQN =$ W. $BTN$. Da nun $PM - PS = y - c = MS$ und eben so auch $QN - TQ = y - c = NT$, so, daß zu MS, NT, die BS, BT als zugehörige x betrachtet werden müssen, so ist nach obiger Propt. $MS : BS = b : a = NT : BT$ und also $MS : BS = NT : BT$, welche Propt., da sie durch sichere Gründe aus dem Angenommenen richtig fließt, die Aehnlichkeit der Tr. SBM, TBN unbezweifelt erweiset und also auch BN nicht als eine gebrochene sondern als eine einzige gr. L. voraussetzt. Eben so ist auch $NT : BT = b : a = AB : AO$ oder $NT : BT = AB : AO$; und auch hier $\triangle BNT \backsim \triangle OBA$ und W. $TBN =$ W. $AOB$, daß also, wegen der Prllen. BH, OD, die gr. L. BN nichts anders als die verl. OB sein kann. Nun sind aber PM, QN, Ord. für willkührlich angenommene Absc. AP, AQ und gelten also diese Schlüsse von allen Ord., oder die Gleich. gehört für die gr. L. ON, die man auch den **Ort der Aufg.** zu nennen pflegt, die dadurch gelöst werden könnte.

§ 154. Für verneinte Absc., wie $AR = AO + OR = \frac{ac}{b} + e$, wenn $OR = e$. Diesen Ausdruck, mit entgegengesetzten Zeichen, für ein neg. x, in der Gleich. substituirt, giebt $y = \frac{b}{a}\left(\frac{-ac}{b} - e\right) + c$ oder $y = \frac{-be}{a}$, daß also für verneinte Absc. über AO, d. i. die gr. als $\frac{ac}{b}$ sind, auch die Ord. verneint werden und unter CD fallen,

wie RK, wenn jene, die pos., über CD genommen worden. Und so giebt eine Reihe neg. Absc., die insgesammt größer als AO, wenn man ihre Theile über O nach C zu $a^{I}$, $a^{II}$, $a^{III}$, $a^{IV}$ ꝛc. nennt, eine Reihe negativer Ordinaten $\frac{-ba^{I}}{a}$; $\frac{-ba^{II}}{a}$; $\frac{-ba^{III}}{a}$; $\frac{-ba^{IV}}{a}$ ꝛc., welches bequemer ist, als wenn man die ganzen Absc. von A an, nach der Reihe $a^{I}$, $a^{II}$, $a^{III}$, $a^{IV}$ ꝛc. hätte nennen wollen.

§ 155. Für die Gleich $y = \frac{bx}{a} - c$ wäre $o = AB$ (Fig. 57) dem vorigen (§ 154, Fig. 56) entgegengesetzt; für $x = o$ wäre $y = -c$; und $x = \frac{ac}{b}$ für $y = o$, und fiele also, wenn die Coordinatenw. dieselben Zeichen, wie vorhin, behalten, der Durchschnitt O der gr. L. mit der Abscissenl. zur rechten Hand von A. Auch wäre für pos. Absc. wie AR, die grß. als AO, jede Ord. pos., und wenn man den Ueberschuß $OR = e$, wie vorher, setzt, RK oder $y = \frac{be}{a}$, Für jede verneinte Absc. aber, wie AP, AQ von o nach $-\infty$, ist jede Ord. verneint, so wie vorher für jede pos. Absc. von o nach $+\infty$, die Ord. bejaht waren. Es ist nämlich hier alles umgekehrt.

§ 156. In der Gleich. $y = c - \frac{bx}{a}$ wäre $x = o$, $y = c = AB$ (Fig. 58); und $x = \frac{ac}{b} = AO$, für $y = o$; auch wären für neg. Absc. die Ord. durchgängig pos., und der P. O fiele rechter Hand des Anfangs A.

Für die Gleich. $x = \frac{-bx}{a} - c$ ist wieder alles umgekehrt. Alle pos. Absc. haben neg. Ord., auch fallen hier

(Fig. 59) C und AB so, daß ihre Lage der vorhergehenden entgegengesetzt ist.

§ 157. Diese vier Gleich. kann man allgemein in dem Ausdruck $y = \pm \frac{bx}{a} \pm c$ zusammenfassen; und sind hierin alle Gleich. begriffen, in welchen x, y nur von der ersten Potenz und nicht in einander multipl. sind; daß y keinen Coefficienten hat, schadet ihrer Allgemeinheit nichts, weil man den Coefficienten eines jeden Gliedes durch die Division wegbringen kann; auch kann eine von den veränderten Grß., wie hier y, allemal pos. gesetzt werden. Es ist also dieses eine allgemeine Gleich. vom ersten Grade, die, wie alle andern Gleich. von diesem Grade, der gr. L. eigen ist. Eine solche Gleich. kann auch nur, wie hier, drei Glieder aufs höchste haben.

§ 158. Nach § 153 (Fig. 56) ist BS = AP = x; MS = y — c und △ OAB ∽ △ BSM; folglich OA : AB = BS : MS; oder, MS = z gesetzt, a : b = x : z und $z = \frac{bx}{a}$, eine andere Gleich. für eben die gr. L., welche hier durch B, als den Anfang der Absc., geht (§ 152), weil für x = o, auch z = o. Diese Gleich. ist aber nur ein besonderer Fall von der in § 153. Denn in $y = \frac{bx}{a} + c$ bestehet überhaupt jede Ord. aus einem veränderlichen Theile $\frac{bx}{a}$ und einem beständigen c (AB). Setzt man nun den letztern d. i. c = o, so fällt für $y = \frac{bx}{a}$, CD mit ihrer Prll. GH zusammen, und sind BS, SM die zweiten Coord., wenn AP, PM die ersten sind.

§ 159. Aus $y = \frac{bx}{a}$ wird $ay = bx$. Setzt man hier $b = o$, so ist $ay = o$ und $y = o$, und fällt die L. ganz in die Abscissenl., weil nämlich in ihr die Ord. für jede Absc. durchgängig o sind, Für $a = o$ ist $x = o$, und fällt hier die L. ganz in die Axe der Ord., in welcher zu jedem P. eine Absc. = o gehört. In der allgemeinen Gleichung $y = \pm \frac{bx}{a} \pm c$ würde für $a = \infty$ das Glied $\frac{bx}{a}$ verschwinden, und $y = \pm c$ werden, oder die L. mit der Abscissenaxe prll. laufen.

§ 160. Wäre aber die gr. L. KN gegeben, so könnte man ihre Gleich. folgendergestalt erfinden: in einer Ebene mit der gegebenen gr. L. KN ziehe man willführlich eine andre gr. L. CD, die man für die Abscissenl., und in ihr einen P. A für den Anfang der Absc. nach Gefallen annimmt. Die Abscissenl. kann gegen die gegebene entweder prll. sein oder beide können einander schneiden. In dem letztern Falle ist, wie hier, der Durchschnittsw. bei O aus beider Lage bestimmt, O und A sind gegebene P., und OA ist eine unveränd Grß. Man ziehe AB nach dem Ordinatenw., so ist auch AB, wegen des gegebenen Coordinatenw., unveränderlich, und OA : AB ist ein gegebenes unveränderliches Verh. m : n, wenn man OA = m und AB = n setzt. Nun ziehe man aus einem bel. P M der gegebenen gr. L. KN mit AB eine Prlle. PM, so sind AP, PM, willführlich angenommne Coord. x, y, und ist OA : AB = OP : PM, oder, weil OP = OA + AP = m + x ist, $m : n = m + x : y$ und $y = \frac{nx}{m} + n$ die allgem. Gleich. für eine

gr. L., die mit der, § 153, völlig einerlei, wenn man hier $\frac{ac}{b}$ statt m und c, statt n setzen wollte.

§ 161. Diese Gleichung, durch x dividirt, giebt $\frac{y}{x} = \frac{n}{m} + \frac{n}{x}$. Der Quotient $\frac{y}{x}$ besteht hier aus einem unveränderl. Theile $\frac{n}{m}$ und einem veränderl. $\frac{n}{x}$, welcher letztere zugleich den Unterschied ausdrückt, um welchen $\frac{y}{x}$ größer ist als $\frac{n}{m}$. Dieser Unterschied wird immer kl., je größer x angenommen wird, und muß unter allen Gränzen abnehmen, wenn x über alle Gränzen wächst, weil n unverändert bleibt. Es nähert sich nämlich das veränd. Verhältniß PM = AP dem unveränd. AB : AO immer mehr und mehr, je größer AP und mit ihm PM angenommen wird, es ist ihm aber niemals gleich, so lange sich AP noch angeben läßt, und ist also hier nur eine Näherung zur Gleichh. ohne Ende zu verstehen. Für x oder AP = ∞ wäre freilich vollkommen y : x = n : m oder $\frac{y}{x} = \frac{n}{m}$, aber ein solches AP läßt sich eben so wenig als sein zugehöriges PM angeben, d. i. diese Grß. lassen sich mit keiner bestimmten endlichen Grß., wie AB, vergleichen oder ausmessen; sonst müßte man diese unendliche Grß. als etwas würklich vorhandenes ansehen; welches widersprechend wäre, da sich nur endliche Grß. bestimmt angeben lassen: und nach der Voraussetzung der P. P weiter von A, als jede Entfernung, die sich angeben läßt, als jede endliche Weite, hinaus liegt.

§ 162. Eben so kann der Durchschnitt O von dem

unveränderlich angenommenen A immer weiter und weiter fort rücken, wenn man die L. KN dergestalt um den unbeweglichen P. B herumdreht, da der W. OBA nach und nach größer wird. Denn hierdurch wächst OA oder m beständig, und so geschwind, daß es alle Grß. übersteigt, die sich nur angeben lassen, auch ehe noch KN in die prlle. Lage mit CD kommt, weil hier kein letzter Durchschnp. O sich bestimmt angeben läßt. In dem Maaße aber, wie W. OBA wächst, nimmt zu gleicher Zeit W. NBT ab, und wird immer kl., d. i. der veränderliche Theil $\frac{nx}{m}$ (§ 160) der Ord. vermindert sich, je größer OA oder m wird, und nähert sich hier y seinem unveränd. Theil n ohne Ende. Für die vollkommen prlle Lage der L. KN mit CD wäre AO oder $m = \infty$, und in $y - n = \frac{nx}{m}$, die letztere Hälfte $\frac{nx}{m}$, das endliche nx mit dem unendlichen m dividirt, $= 0$; folglich $y - n = 0$ und $y = n$ eine Gleichung für Parallelen (§ 159), für welche die Ord. AB, PS, QT rc. unveränderlich sind. Weil man nun für die prll. Lage den Durchschnp. O in CD als unendlich entfernt von A ansieht, so sagt man insgemein, die Prllen. schnitten einander in einer unendlichen Entfernung von irgend einem in ihr angenommenen P.; welches nichts anders heißt, als daß der Ort, wo dieses geschieht, nirgends ist. Also giebt es auch hier eigentlich kein solches m, sondern es kann nur über alle Grenzen wachsen, und also $\frac{n}{m}$, oder auch $\frac{nx}{m}$ (so lange x einen bestimmten Werth behält, wie groß er auch sei), dem Werth 0 so nahe kommen, daß beider Unterschied kl. als jede angebliche Grß. ist.

§ 163. Eine Gleich., in welcher x, y, nur von der

ersten Potenz und nicht in einander multipl. sind, drückt also die Natur einer gr. L. analytisch aus, und wird, da jede L. ihren eigenen bestimmten Grad hat (§ 144), jede höhere Gleich., die keine rationale Divisoren hat (§ 135), einer kr. L. zugehören. Für $y^2 - 2cy = \frac{b^2x^2}{a^2} - c^2$, wäre $y = c \pm \frac{bx}{a}$. Also drückte diese Gleich. nicht eine zusammenhängende kr. L., sondern die Verbindung, oder das System zweier gr. L. aus, die sich beide auf einerlei Axen und ebendenselben Anfangsp. der Absc. beziehen. Denn die beiden rationalen Werthe $y = c + \frac{bx}{a}$ und $y = c - \frac{bx}{a}$ sind die, § 153, 156, angezeigten Gleich. der gr. L. KN in eine Gleich. verbunden.

§ 164. PM, pm sind hier Ord. (Fig. 60), die so wie QN, qn, zu verschiedenen L. gehören. Aber in B, wo beide L. einander schneiden, ist AB die gemeinsch. Ord. für beide, deren Absc. in den P. A fällt. Diesen Durchschnitt B sogleich zu bestimmen, ohne erst die L. selbst zu verzeichnen, müßte man aus den beiden Gleich., welche die rationalen Theile der Hauptgleichung vorstellen, eine einzige bestimmte Gleich machen, die nur eine von den veränd. Grß. x, y, enthält, indem man die eine von ihnen wegbringt. Denn, weil $c + \frac{bx}{a} = y = c - \frac{bx}{a}$, so ist $\frac{2bx}{a} = 0$ u. $x = 0$, d. i. für den Durchschnitt B ist die gemeinsch. Absc. beider L. $= 0$ und fällt also auf A, und ihre Ord. (§ 152) liegt längs der Ordinatenaxe EF, deren Länge man bestimmt, wenn man den gefundenen Werth 0 von x in $y = c \pm \frac{bx}{a}$ substituirt, wo alsdann $y = c$. Nimmt man also auf AE

die Länge AB = c, so findet man den P. B, wo beide L. einander schneiden; welches mit §§ 153, 156 vollkommen übereinstimmt. Die auf solche Art gefundenen gemeinsch. Absc. und Ord. nennt man die Wurzeln der zugehörigen bestimmten Gleich. Diese Wurzeln ergeben sich von selbst durch die Durchschnittsp. Giebt es wenigere Durchschnittsp. als die Gleich. Abmessungen hat, so sind Wurzeln davon unmöglich und also auch die ihnen zugehörigen Durchschn.

§ 165. Von der Gleich. des § 163 kann man nicht sagen, daß sie einer L. der zweiten Ordnung zugehöre, weil die Abmessungen der veränderl. Grß. in ihr auf den zweiten Grad steigen; man müßte denn ein System zweier gr. L., dergleichen diese Gleich. ausdrückt, als eine L. der zweiten Ordnung ansehen, welches zwar wohl anginge, aber doch wider den eingeführten einmal angenommenen Gebrauch wäre. Eben dieses gilt auch von den L. der höhern Ordnungen.

§ 166. Oft wird man durch die Bedingungen der Aufg. genöthigt, zwei geom. Oerter mit einander zu verbinden und beide in einer Gleich. darzustellen. Wollte man auf eine gegebene Hypot. AB = a (Fig. 61) einen rechtw. Tr. setzen, dessen Inhalt einem gegebenen Qdr. $b^2$ gleich wäre, so wäre die erste Bedingung der Aufg. an den Ort (§ 151) $y^2 = ax - x^2$ für den Kr. gebunden, und bei der zweiten Bedingung, den Inhalt betreffend, käme es bloß auf Erfindung der Höhe y des Tr. an. Es ist aber hier $\frac{1}{2}ay = b^2$ oder $y = \frac{2b^2}{a}$, eine Gleich. für eine gr. L., die mit der gegebenen Hypot. in der Entfernung $\frac{2b^2}{a}$ parallel läuft (§ 162) und also auch ein geom. Ort. Beide Oerter thun für sich den einzelnen Bedingungen Genüge. In dem ersten

ist der rechte W. beständig (§ 151), aber der Inhalt veränderlich; bei dem zweiten ist der Inhalt beständig (§ 149) und der W. veränderlich.

Wäre es also möglich, z. E. im letztern Falle, einen oder mehrere P. in der Prlle. geom. zu bestimmen, wo der veränderliche W. ein rechter wird, so wären dadurch beide Bedingungen erfüllt worden, welches geschiehet, wenn man beide Oerter mit einander verbindet. In dieser Absicht reducire man beide gefundenen Gleich. auf Null und multipl. sie in einander, so giebt ihr Prod. eine einzige Gleich., deren Wurzeln mit dem Wurzeln ihrer Fact. einerlei sind. Es werden also in der Gleich. $(y^2 + ax + x^2) . \left(y - \frac{2b^2}{a}\right) = 0$ oder $y^3 - \frac{2b^2}{a} y - (ax - x^2) y + \left(2b^2 - \frac{2b^2}{a} x\right) x = 0$ alle diejenigen P. der Aufg. in beiden Forderungen ein Genüge thun, die beiden L. gemein sind, welches keine anderen als ihre Durchschnp. sein können. Man beschr. also von einem Anfangsp. A (Fig. 61) einer angenommenen Abscissenaxe den Ort $y^2 = ax - x^2$ in der gegebenen Grß. von a und verbinde hiermit den Ort $y = \frac{2b^2}{a}$, so sind die Durchschn. M, m die gesuchten P., und AMB oder AmB die verl. Tr., deren Höhe das Prod. $MP = \frac{2b^2}{a}$ aus dem rechten W. ist.

§ 167. Hätte man sogleich in der Gleich. für den Kr. die gefundene Höhe $\frac{2b^2}{a}$ anstatt y substituirt, so hätte die bestimmte Gleich. $ax - x^2 = \frac{4b^4}{a^2}$ oder $x^2 - ax = \frac{-4b^4}{a^2}$,

den Werth für $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{(a^4 - 16b^4)}}{2a}$, d. i. die beiden Absc. AP, Ap, für die Durchschnp. M, m kurz gegeben. Je größer man b annimmt, desto näher rücken beide Durchschnitte an D und sind so lange möglich als $a^4 > 16b^4$ oder $a > 2b$. Für $b = \frac{1}{2}a$ wird $\sqrt{(a^4 - 16b^4)} = 0$, und fallen beide Absc. auf $AC = \frac{1}{2}a$, beide Durchschnitte vereinigen sich in dem P. D, den man hier also als einen doppelten Durchschnitt ansehen kann, und GH wird an dem Berührungsp. D eine Tang. Auch wird hier CD, die Ord., ein größtes, und hat also der Tr. ADB für $b = \frac{1}{2}a$ die größte Fläche unter den möglichen Tr. auf der Hypot. AB. Für $b > \frac{1}{2}a$ wäre die Wurzelgrß. unmöglich, und gäbe es hier keinen Durchschnitt der Prlle. mit dem Halbkr., oder die Aufg. selbst enthielte in dem Falle eine unmögliche Forderung.

§ 168. Aus dem Bisherigen erhellet zugleich, daß eine gr. L. mit einer andern gr. nur einen, mit einer kr. höchstens zwei und so mit anderen L. höherer Ordn. auch wohl mehrere P. gemein habe, oder sie in mehreren P. schneiden könne; wobei man auf die Abmessungen der x und y in der Gleich. Acht haben muß. Auch gehört die Aufgabe § 166 nicht mehr zu den unbestimmten Aufg., weil für die beiden Bedingungen in ihr auch zwei Gleich. gegeben sind, wodurch man die gesuchten P. M, m bestimmt (§ 149) finden kann, obgleich die Bedingungen, einzeln genommen, beide auf einen unbestimmten geom. Ort führen.

§ 169. Der Ort einer Aufg. ist selten eine gr., meistens eine kr. L., und wenn die Aufg. bestimmt ist, ein P. oder mehrere, wie M, m (§ 166). Diese L. sind zwar gemeiniglich ebene L., doch kann auch zuweilen ein solcher Ort eine L. von doppelter Krümmung (§ 128) sein. Auch

die Flächen sind hier nicht ausgeschlossen. Wenn man einen P. suchte, der von einer gegebenen Ebene eine gegebene beständige Entfernung hätte, so wäre der Ort der Aufg. eine prll. Ebene von der gegebenen Distanz von der ersten, weil jeder P. in ihr die geforderte Eigenschaft hat. Ein beweglicher P. hingegen, der von einem andern unbeweglichen P. eine beständige Entf. hält, hat seinen Ort in einer Kugelfläche, wenn man nicht den gesuchten P. auf eine Ebene beziehet; denn alsdann ist sein Ort ein Kr. auf dieser Ebene. Setzen die Bedingungen der Aufg. zwei Flächen voraus, die einander schneiden, so ist der Ort, der beide Bedingungen mit einander verbindet, und die Aufg. löset, eine L., weil zwei Flächen nichts mehr als eine L. mit einander gemein haben können.

§ 170. Ich mache hier eine allgemeine Bemerkung für alle durch Gleich. ausgedrückte Curven. Nämlich die, daß der Anfang der Coord. nothwendig in einem P. der Curve ist, wenn alle Glieder in ihrer Gleich. mit dem unbestimmten x oder y behaftet sind. Wenn hingegen in dieser Gleich. ein gänzlich bekanntes Glied ist, alsdann kann der Anfang der Coord. nicht in einem P. der Curve sein. Um sich davon zu überzeugen, sei eine allgem. Gleich.

$$ax^m + bx^p y^q + cy^n = 0;$$

es ist sichtbar, daß wenn man in dieser Gleich. $x = 0$ setzt, man erhält $cy^n = 0$, oder $y = 0$. Folglich ist der Anfang der Coord. in der Curve. Eben so, wenn man $y = 0$ setzt, erhält man $ax^m = 0$, und folgl. $x = 0$; welches genau auf denselben Fall wie vorher zurückkommt. Hat man aber eine Gleich., die irgend ein bekanntes Glied enthält, wie

$$ax^m + bx^p y^r + cy^s - g^n = 0;$$

macht

macht man $x = o$, so findet man $cy - g^n = o$, und daher $y^s = \frac{g^n}{c}$ oder $y = \sqrt[s]{\frac{g^n}{c}}$; welches beweiset, daß der P. M der Curve von dem Anfange der xen um die Größe $\sqrt[s]{\frac{g^n}{c}}$ entfernt ist, und daß derselbe Anfang der Coordinaten nicht im Umfange der Curve liegt. Man leitet dieselbe Wahrheit ab, wenn man $y = o$ macht; welches $x = \sqrt[m]{\frac{g^n}{a}}$ geben würde.

---

## Fünftes Kapitel.

### Von den Eigenschaften der Parabel in einer Ebene betrachtet.

---

§ 171. Erkl. RS sei eine bel. unbegrenzte gr. L., die wir Directrisse nennen, und in eben dieser Eb. außerhalb dieser Directr. ein P. F, den wir Brennpunkt nennen wollen. Sucht man nun unzählig viele P. wie M, so daß die beiden L. aus einem dieser P., die eine MF zu dem Brennp. F, die andere MQ perpd. auf die Directr. RS gezogen, einander gl. seien, so ist die durch alle diese P. gezogene Curve eine Parabel. (Fig 62).

§ 172. I. Aufg. Nach der obigen Erkl. der Parabel diese Curve zu beschreiben, oder, welches einerlei, soviel Punkte M, als man will, zu finden. (Fig. 62.)

Aufl. Aus dem P. F errichte auf der Directr. RS einen Perpd. FB, auf welcher man in so viel P. P, als man will, unbegrenzte Perpd. mPM errichtet. Nachgehends beschreibe man aus dem Brennp. F als Mittelp. mit einem Halbm. FM = BP Kreise, wodurch die gr. L. MPm in zwei P. M, m geschnitten wird, welches die beiden P. der Curve auf diese L. sein werden.

Bew. Aus dem gefundenen P. M sei MQ perpd. auf der Directr. errichtet, so hat man QM = BP; da nun BP = FM gemacht worden, so ist auch QM = FM, folgl. ist nach der Erkl. M ein P. der Parabel.

§ 173. Zus. 1. Aus dieser Constr. und aus der Erkl. (§ 171) folgt, daß die Parab. nothwendig durch die Mitte A von BF geht; weil in diesem P. BA = AF.

§ 174. Zus. 2. Es folgt hieraus noch ferner, daß diese Curve aus zwei unbegrenzten Zweigen AMM, Amm zusammengesetzt ist, die sich immerwährend von der L. AP entfernen, und die in Betracht dieser L. symmetrisch liegen, die folgl. die Curve in zwei gleiche Theile theilt.

§ 175. Erkl. Die L. AP heißt die Axe der Parab.; die Mitte A von BF wird der Scheitel von dieser Curve genannt. Eine gr. L. MP aus einem P. M der Curve perpend. auf die Axe gefällt, ist eine Ordinate auf dieser Axe. Die Theile AP der Axe zwischen dem Scheitel und dem Fuße der Ord. sind die zu den Ord. PM correspondirende Abscissen. Eine L., welche das doppelte von BF ist, nennt man Parameter der Parabel.

§ 176. I. Lehrs. In einer Parabel, ist das Quadrat $PM^2$ von irgend einer Ordinate PM gleich dem Producte aus ihrer Abscisse AP mit dem Parameter (Fig. 62).

Bew. Die bekannte L. AF oder AB sei a genannt, so wird der Parm. $p = 2BF = 4a$; es sei auch $AP = x$,

und PM = y; wenn der P. P zwischen den Scheitel A und den Brennp. F fällt, so ist $FP = a - x$; im Gegentheile ist $FP = x - a$, wenn der P. P über den Brennp. in Bezug des Scheitels A hinaus fällt. In einem so wie in dem andern Falle hat man $PM^2 = FM^2 - FP^2$; aber durch die Constr (§ 172) $FM = BP = a + x$; setzt man also die analytischen Werthe, so hat man

$$y^2 = (a + x)^2 - (a - x)^2 = 4ax = px.$$

§ 177. Zus. 1. Hieraus folgt, daß in einer Parabel die Qdr. der Ord. sich wie ihre correspondirende Absc. verh.; denn es sei y irgend eine Ord., deren Absc. x und Y eine andere Ord., deren Absc. X; wir haben also $y^2 = px$ und $Y^2 = pX$;

folgl. $y^2 : Y^2 = px : pX = x : X$.

§ 178. Zus. 2. Aus der Gleichung $y^2 = px$ folgt $p : y = y : x$, d. h. jede Ord. ist die mittlere geom. Proportionale zwischen dem Param. und der ihr zugehörigen Absc.; woraus folgt, daß wenn von den drei L. der Parm., einer Ord. und zugehörigen Absc., irgend zwei bekannt sind, die dritte es auch sei.

§ 179. Zus. 3. Es folgt hieraus noch, daß die durch den Brennp. F gehende doppelte Ord. gl. dem Parm. ist. Denn in diesem Falle ist die Absc. $x = AP = AF = a = \frac{1}{4}p$ (§ 175 u. 176); folgl. $y^2 = \frac{1}{4}p^2$, demnach $y = \frac{1}{2}p$; folgl. $2y = p$.

§ 180. II. Aufg. In einen gegebenen P. M der Parabel eine Tangente an diese Curve zu ziehen (Fig 63).

Aufl. Aus dem gegebenen P. M sei nach dem Brennp. F die MF gezogen, und auf die Directr. ein Perpd MQ; zieht man nun durch die Mitte D der FQ und durch den gegebenen P. M eine gr. L. MD, so ist sie die geforderte Tangente.

Bew. Aus irgend einem andern P. m in MD seien mF, mQ und mq gezogen, so ist die Kathete perpd. auf der Directr. Durch Constr. ist MD perpd. in der Mitte auf QF, weil MF = MQ (§ 171) und FD = QD ist. Diese gr. L. geht also durch alle P., die von F und Q gl. weit entfernt liegen; also mF = mQ; aber mq < mQ; mithin auch mq < mF; folgl. ist nach der Erkl. (§ 171) m kein P. der Parb. Und da nun dieses für jeden andern von M verschiedenen P gezeigt werden kann, so ist evident, daß der P. M der einzige sei, welcher der Curve und der gr. L. MD zugleich angehören kann; folgl. ist MD in dem gegebenen P. eine Tangente.

§ 181. Zus. 1. Verl. man die Tg. MD, bis sie die ebenfalls verl. Axe in T trifft, so wird der Theil PT der Axe zwischen T und dem Fuße P der durch den Berührungsp. gehenden Ord. doppelt so groß sein, als die zu der Ord. MP gehörige Absc: denn durch die Constr. der Tg. ist ∠ FMD = DMQ; aber DMQ = FTM, weil FT ‖ QM; es ist also der Tr. MFT gleichschenklig; man wird also haben FT = FM; aber FM = MQ (§ 171), und MQ = BP; mithin FT = BP, und wenn man von diesen gl. L. die gl. L. AB, AF wegnimmt, so hat man AT = AP; woraus folgt, daß PT = 2AP. Die L. PT hat man Subtangente genannt; folgl. die Subtangente PT = 2x, d. h. in einer Parab. ist die Subtang. gl. der doppelten Absc.

§ 182. Zus. 2. Es folgt ferner hieraus: wenn man in M auf der Tang. MT einen Perpd. MR errichtet, der sich auf der Axe in R endiget und Normale heißt, so wird der Theil RP derselben Axe, den wir Subnormale nennen, in der Parb. gleich dem halben Parameter sein. Denn △ RPM ≌ △ FBQ, also PR = BF = 2a = ½p;

woraus sich ergiebt, daß in der Parb. die Subn. eine beständige Größe und immer gleich dem halben Parameter ist. Dieser Satz folgt auch daraus, weil uns der rechtw. Tr. TPM folgende Propt. giebt:

$$PT : PM = PM : PR,$$

$$\text{d. h. } 2x : y = y : \text{Subn.};$$

$$\text{folgl. Subnorm.} = \frac{y^2}{2x} = \frac{px}{2x} = \tfrac{1}{2}p.$$

§ 183. Zus. 3. Kennt man die Subtg. PT, und die Subnorm. RP, so ist es leicht, den analytischen Ausdruck von der Tang. MT und von der Norm. MR zu haben. Der rechtw. △ MPT

$$\text{giebt Tg.} = MT = \sqrt{(px + 4x^2)},$$

und der rechtw. △ MPR giebt

$$\text{Norm.} = MR = \sqrt{(px + \tfrac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(x + \tfrac{1}{4}p)p} = \sqrt{[(4x + p)\tfrac{1}{4}p]};$$

mithin

$$MT : MR = \sqrt{(px + 4x^2)} : \sqrt{[(p + 4x)\tfrac{1}{4}p]} = \sqrt{x} : \tfrac{1}{2}\sqrt{p}.$$

§ 184. Zus. 4. Verl. man MQ innerhalb der Parabel nach E zu, so werden die auf einerlei Seite der Tg. mit dieser L. durch ME, MF gemachten W. offenbar einander gl. Denn durch Constr. ist ∠ FMD = DMQ, aber ∠ DMQ = EML als Scheitelw.; folg. ∠ FMD = EML, woraus folgt: wenn man in einer Parb. oder in der Höhlung durch die Umdrehung dieser Curve um ihre Axe, prll. Lichtstr. mit dieser Axe empfängt; so werden sie alle durch die Curve oder durch die hohle Fläche der Paraboloide in dem Brennpunkt F reflektirt. Dieses ist eine nothw. Folge von der Gleichheit der W. FMD, EML, und den Gesetzen der elastischen Körper. Umgekehrt, wenn der Brennp. F ein leuchtender P. ist, so werden alle aus diesem P. ausgehende Lichtstrahlen von der Curve prll. mit

der Axe reflectirt; und dieser Eigenschaft wegen hat er den Namen Brennpunkt erhalten.

§ 185. Erkl. In der Folge werden wir jede L. FM, die aus dem Brennp. nach irgend einem P. M der Curve gezogen wird, den Radiusvector oder kurz Vector nennen.

§ 186. II. Lehrs. Denkt man sich verschiedene Tg. wie MT an verschiedenen Punkten der Curve gezogen, und läßt auf jede von diesen Tangenten aus dem Brennpunkte F einen Perpendikel wie FD fallen; so wachsen diese Perpendikel FD wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Vectoren. (Fig. 63).

Bew. Zieht man durch A und D die AD, so ist sichtbar, daß diese L. prll. mit der Directr. BQ ist, weil sie die Seiten BF, QF halbirt; also ist diese L. prd. auf der Axe; die rechtw. Tr FAD, FDT sind ähnl., weil sie den W. F gemein haben und geben $FA : FD = FD : FT = FM$ (§ 181). Mithin $FA . FM = FD^2$; eben so ist $FA . Fm = Fd^2$; daher $FD^2 : Fd^2 = FA . FM : FA . Fm = FM : Fm$; folgl $FD : Fd = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$.

§ 187. Erkl. (Fig. 64) Jede gr. L. MQ, durch einen P. M der Parb., prll. mit der Axe dieser Curve, heißt ein Diameter. Man nennt Ursprung oder Anfangsp. dieses Diam den P. M, wo er die Curve schneidet. Jede gr. L. NQ, prll mit der Tang in M, begrenzt von der Curve in N und von dem Diam. in Q, ist eine Ord. auf diesem Diam. Man nennt Abscissen die Theile eines Diam. zwischen dem Anfangsp. dieses Diam. und dem Endp. Q der Ord NQ dieses Diameters.

§ 188 III. Lehrs. Es sei immer noch die Tangente MT begrenzt durch die Axe in T; errichtet man im Scheitel A die Tangente ACL perpendikulär auf dieser Axe, so daß die

Tangente MT in C und dem verlängerten Diam. MQ in L begegnet; so ist der $\triangle CAT \cong \triangle MCL$. (Fig. 64).

Bew. Die Tr. CAT, MCL sind beide rechtw. und congr., weil $AT = AP = ML$ und die W. bei C gl. sind.

§ 189. Zus. 1. Also ist der Tr. TMP gl. dem Rect. AM; denn

$$\triangle CAT \cong \triangle CLM \ (\S\ 188)$$
$$\text{Trap. } PC = \text{Trap. } PC$$
$$\overline{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$
$$\text{folgl. Tr. } TMP = \square AM.$$

§ 190. Zus. 2. Es folgt hieraus ferner: wenn man durch einen P. N der Curve eine Ord. QNR auf den nöthigenfalls verl. Diam. MQ zieht, und durch denselben P. N eine andere Ord. GN auf die Axe AP und GN verl., bis sie den verl. Diam. MQ in H trifft, so hat man $\triangle GRN = \square AH$; denn die Tr. MPT, NGR sind ähnlich; mithin

$$\triangle MPT : \triangle NGR = PM^2 : GN^2,$$

§177 wegen der Prb. $PM^2 : GN^2 = AP : AG$ oder $= \square AM : \square AH$;

folgl. $\triangle MPG : \triangle NGR = \square AM : \square AH$.

Aber $\triangle MPT = \square AM$ (§ 189);

folgl. $\triangle NGR = \square AH$.

§ 191. Zus. 3. Noch folgt aus dem Vorhergehenden, daß der $\triangle NQH =$ Prllgrm. TQ; denn wir haben $\triangle TPM = \square AM$ (§ 189); und nach (§ 190) $\triangle NGR = \square AH$;

mithin $\triangle TPN - \triangle NGR = \square AM - \square AH$;

zieht man davon noch das gemeinschaftliche Trap. PD ab, so findet man $NDTR = \triangle DHM$; also

$$NDTR + DMQN = \triangle DHM + DMQN;$$

folgl. Prllgrm. $TQ = \triangle NQH$.

§ 192. IV. Lehrs. Die Quadrate $NQ^2$, $nq^2$ der Ordinaten NQ, nq auf einerlei Diameter verhalten sich untereinander, wie die zugehörigen Abscissen MQ, Mq. (Fig. 65)

Bew. Aus dem Endp. N, n der Ord. NQ, nq seien die Perpd. NH, nh auf den nöthigenfalls verl. Diam. MQ geführt. Ueberdem seien auch dieselben Ord., wenn es nöthig ist, verl., bis sie die Axe in R, r treffen; die Tr. NQH, nqh sind nun ähnl.; und jeder respective gl. dem zugehörigen Prllgrm. TQ, Tq (§ 191); also

$$NQ^2 : nq^2 = \triangle NQH : nqh$$
$$= \text{Prllgrm. } TQ : \text{Prllgrm. } Tq$$
$$= MQ : Mq.$$

§ 193. Zus. 1. Sucht man eine dritte Proportionale P zu einer beliebigen Ab c und die dazu gehörige Ord., so wird diese L. der Parm. des Diam MQ sein, und das Qdr. einer bel. Ord. wird gl. dem Prod. aus ihrer Absc. und demselben Parm sein. Denn es sei x und y die Absc. und Ord., von welchen P die dritte Proportionale ist; so hat man $x : y = y : P$; folgl. $y^2 = P . x$; es sei eine andere Ord., deren Absc. X, so hat man (§ 142)

$$Y^2 : y^2 = X : x$$
$$= PX : Px;$$
$$\text{Nun ist } y^2 = Px;$$
$$\text{folglich auch } Y^2 = P . X.$$

Die Gleich der Parb. in Bezug auf ihren Diam. ist also ganz genau dieselbe als in Bezug auf ihre Axe.

§ 194. Zus. 2. Es folgt hieraus ferner, daß der Parm. P von irgend einem Diam. gleich dem Parm. der Axe plus viermal der Absc. AP, welche der durch den Anfangsp. des Diam. auf die Axe gezogenen Ord. zugehört, d. h. $P = p + 4x$.

Um sich davon zu überzeugen, so ziehe man durch den

Scheitel A der Parb. auf den Diam. MQ die Ord. AZ; so ist nach § 193

$$AZ^2 = MZ \,.\, P = AP \,.\, P.$$ (§176)

Aber auch

$$MT^2 \text{ oder } AZ^2 = PM^2 + PT^2;$$

mithin $$AP \,.\, P = PM^2 + PT^2;$$

oder $$P \,.\, x = px + 4x^2;$$ (§176 u. §181)

folgl. $$P = p + 4x.$$

§ 195. Zus. 3. Der Parm. P irgend eines Diam. ist also das 4fache von der Entfernung FM seines Anfangsp. M von dem Brennp. der Parb., oder von der Entf. desselben P. M von der Directr.; denn wir haben (§ 181) gesehen, daß

$$FM = FT = AF + AT = \tfrac{1}{4}p + x$$ (§ 178, 179);

folgl. $$4FM = p + 4x = P$$ (§ 194),

woraus augenscheinlich folgt, daß der Parm. der Axe der kleinste von allen Parametern ist.

§ 196. Zus. 4. Nimmt man auf dem Diam. eine Absc. $MQ' = MF$ oder $FT = \frac{1}{4}P$ (§ 195); so wird die correspondirende Absc. sein $\sqrt{\frac{1}{4}P^2} = \frac{1}{2}P$; woraus augenscheinlich folgt, daß die doppelte Ord. auf irgend einen Diam., und die durch den Brennp. geht, gleich ist dem Parm. dieses Diam., so wie solches schon (§ 179) für die Axe bewiesen worden. Die Parb. ist die einzige Curve, in welcher dieses sowohl für die Axe wie für den Diam. gilt.

§ 197. V. Lehrs. Wenn man durch die Endp. M, N von zwei Ordinaten MP, NQ auf irgend einen Diameter eine nöthigenfalls verlängerte Secante MN zieht, bis sie den Diameter oder seine Verlängerung in R trift, so hat man immer $AR^2 = AP \,.\, AQ$. (Fig. 66).

Bew. Es sei $AR = a$; $AP = x$, $AQ = t$; so ist

RP = a + x, und RQ = a + t; wegen der ähnl. Tr. RPM, RQN, hat man

$$RP^2 : RQ^2 = PM^2 : QN^2 = AP : AQ \ (\S\ 191);$$

setzt man dafür die analytischen Werthe, so ist

$$(a + x)^2 : (a + t)^2 = x : t,$$

$$(a + x)^2 . t = (a + t)^2 x,$$

$$a^2 t + tx^2 = a^2 x + t^2 x,$$

$$a^2 t - a^2 x = t^2 x - tx^2,$$

$$a^2 (t - x) = tx (t - x);$$

folgl. $a^2 = tx$,

d. h. es ist $AR^2 = AP . AQ$.

§ 198. Zus. 1. Stellt man sich vor, daß MP, NQ sich mit sich selbst prll. bewegen, bis daß sie sich in eine einzige M′P′ vereinigen, so wird die Sec. NMR die Tg. M′T; die L. AP, AQ werden jede gl. AP′; aber die Proportion findet immer Statt; man wird also haben

$$AT^2 = AP' . AP'; \text{ folglich } AT = AP';$$

woraus folgt, daß eine Subtg. P′T für einen bel. Diam. immer das Doppelte der Absc. ist, die zu der durch den Berührungsp. geführten Ord. gehört. Folglich wird die allg. Formel der Subtg. für die Axe oder für den Diam. immer PT = 2x sein.

199. Zus. 2. (Fig. 67) Es folgt aus diesem Satze: wenn man durch den Endp. M von derselben Ord. und den Endp. N, n, n′ von mehreren Ordin. QN, qn, q′n′, versch. Sec. NM, nM, n′M zieht, welche den Diam. in R, r, ϱ treffen, so werden die Qdr. der L. AR, Ar, Aϱ sich unter sich verh., wie die Prod. aus den corresp. Absc. AQ, Aq, Aq′ mit der beständigen AP, oder vielmehr wie die nämlichen Absc. Trägt man also diese L. AR, Ar, Aϱ, die wir Subsecanten nennen wollen, auf die Ord. QN, qn, q′n′ in QS, qs, q′s′, so wird die Curve, die durch alle diese P. geht, und die man die Curve der Subsec. nennen könnte, nothwendig eine Parabel sein, welche die Absc. AE zum Parm hat.

§ 200. Zus. 3. Der Satz wird noch wahr sein, wenn die Sec. MN den Diam. innerhalb der Parb. schnitte, welches geschieht, wenn man die Ord. QN auf der andern S. des nämlichen Diam. in QN′ nimmt. Der Bew. ist von dem des Lehrs. nicht verschieden. Fig 66

§ 201. VI Lehrs. Wenn man in einem Parabel-Segment einen Triangel MAm einschreibt, dessen Spitze A im Anfangspunkt des Diameters liegt, der Mm hälbirt, so wird dieser Triangel unter allen, die man auf gleiche Art in diesem Segmente einschreiben kann, der größte sein. (Fig. 68).

Bew. Durch A sei AL eine Tang., diese wird mit der Ord. MPm (§ 187) prll. sein. Folgl. jeder Punkt der Curve, der von A verschieden ist, wird unterhalb der Tang. liegen, woraus evident folgt, daß der Tr. MAm der größte ist, den man in diesem Segm. einschr. kann.

§ 202. Zus. 1. Um eben so in die Segm. ANM, Amn die möglich größten Tr. einzuschr., darf man nur durch die Mitten F, f der Sehnen AM, Am die Diam. FN, fn führen, und in jedem Segm. AN, MN; An, mn nach den Anfangsp. N, n der nämlichen Diam. ziehen.

§ 203. Zus. 2. Es folgt hieraus, daß der △ MPA das Vierfache von dem △ ANM ist. Um dieses zu bew., seien durch N, F die NQ, FG prll. mit der Ord. PM bis zum Diam. AP gezogen. Weil nun DF || AP und durch die Mitte von AM geht, so sind NQ, GF die Hälften der Ord. MP; da überdem die Absc. AP, AQ sich wie die Quadr. ihrer zugehörigen Ordin. verh., so hat man AP : AQ = $MP^2 : NQ^2 = 4 : 1$, weil MP = 2NQ, wie wir so eben gesehen haben. Mithin sind die beiden gl. Tr. ANF, MNF zusammen gl. den Tr. AFG, weil dieser Tr. seine Spitze

△ANF = △AFG weil AG = 2NF
△MNF = △ANF weil △△ ... = Grundl. u. Höhe
△AMN = △AFG.

zwischen denselben Prllen. hat, und seine Grdl. AG = 2NF ist. Ueberdem ist es bei Ansicht der Fig. sichtbar, daß der △APM = 4△AFG; folgl. auch derselbe △APM = 4ANM, weil △ANM = △ANF + △MNF.

§ 204 VII Lehrs. Der Inhalt eines Parabel-Segments MNAnm ist gleich $\frac{2}{3}$ eines umschriebenen Parallelogramms MLlm, dessen Seiten die doppelte Ordinate MPm und Abscisse AP sind. (Fig. 68).

Bew. Wir haben so eben gesehen, daß der Triangel ANM = $\frac{1}{4}$ des Tr. AMP ist. Eben so zeigt man auch, daß die Summe der in den Segm. MRN, NrA eingeschr. größtmöglichen Tr. MRN, NrA auch gl. $\frac{1}{4}$△ANM ist. Man kann sich also vorstellen, daß die Fläche des Parb.-Segm. mit einer unendlichen Menge von Tr. dieser Art angefüllt ist, die im Verh. von 4 zu 1 abnehmen; wenn man daher den Inhalt des △s AMP durch 1 ausdrückt, so hängt die Quadratur des halben Parb. Segm. von der Summation der folgenden ins unendliche abnehmenden geom. Progression ab;

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

Diese Summe findet man nach der Formel $S = \frac{a^2}{a - b}$, wenn man a = 1 und b = $\frac{1}{4}$ macht; welches S = $\frac{4}{3}$, oder das Segm. AMNP = $\frac{4}{3}$△AMP = $\frac{2}{3}$ Prlgrm. PL; folgl. 2 Segm. ANMP = 2 Prllgrm. PL = $\frac{2}{3}$ Prllgrm. Ml.

§ 205. Zus. Das halbe Parb.-Complement AMNL ist also = $\frac{1}{3}$ Prllgrm. PL.

§ 206. Anmerk. Aus allem Vorhergehenden folgt, daß alle Eigenschaften der Parb. beständig dieselben sind; man mag diese Curve in Bezug auf ihre Axe oder in Bezug auf ihren Diam, betrachten. Man kann also eine Parb., die auf einen ihrer Diam. bezo-

gen wird, ansehen, als wenn sie aus einer andern Parb. gebildet wäre, die in Bezug auf ihre Axe betrachtet worden, und welche denselben Parm. hatte, deren Ord. sich alle gleichviel gegen diese zum Diam. gewordene Axe geneigt hätten. Diese Curve hat noch eine Menge andere eben so sehr interessante Eigenschaften, aber die uns gesteckten Grenzen erlauben uns nicht sie vorzutragen, vielmehr sei es uns erlaubt, in den noch folgenden §§ dieses Kap. den Anfängern zur Uebung aus einer andern Erkl. die Eigenschaften der Parb. wenigstens in Bezug der Axe unabhängig von dem Vorhergehenden abzuleiten.

§ 207. Die Parabel ist eine kr. L., in welcher bei rechtw. Coord. $y^2 = px$, d. i. in welcher das Quadrat der Ord. dem Rechteck aus der Absc. in den Param. gl. ist; wo y die Ord., x die Absc. und die beständige oder unveränderl. L. p den Parameter ausdrückt, von welchem die Größe der Parb. so wie die Grß. des Kr. von dem Durchm. abhängt und bestimmt wird.

§ 208. Aus dieser Gleichung, als einer Erkl. der Parm., muß sich nun alles herleiten leiten, was dieser L. zukömmt (§ 140). So ist z. B.

$p = \frac{y^2}{x}$; der Parm. die dritte Propt. zu der Absc. u. Ord.,

$x = \frac{y^2}{p}$; jede Absc. die dritte Propt. zu dem Parm. und der zugehörigen Ord.,

$y = \sqrt{px}$; jede Ord. die mittlere Propt. zwischen dem Parm. und der corresp. Absc.,

daß also jede dieser drei L. aus den beiden andern gefunden werden kann.

§ 209. Man kann also zu jeder willkührlich angenommenen pos. Absc. und dem gegebenen beständigen Parm. die Grß. der Ord. und also jeden P. in der Parb., als den Endp. einer solchen Ord. (§ 136), geom. bestimmen.

Denn man nehme auf einer Abscissenl. den P. A als den Anfang der Absc. und ziehe durch ihn prd die Ordinatenaxe GH (Fig 69); die pos. Absc. sollen jetzt rechter Hand von A fallen, und linker Hand nehme man AE = p. Ein Halbkreis über jedes EP schneidet also auf der Ordinatenaxe, die Länge AΠ für die zugehörige Ord. zu den angenommenen Absc. nach und nach ab, und ist hier durchgängig EA : AΠ = AΠ : AP, d. h. $p : y = y : x$ und $y^2 = px$ oder $y = \pm \sqrt{px}$ Diese versch. AΠ mache man alsdann den Perd durch P vermittelst einer Prlle. ΠM gleich, so sind AP, PM rechtw. Coord. für die P. M, durch welche der parb. Bogen AMM′M″ geht, der durch $y = + \sqrt{px}$ ausgedrückt wird, wenn man die Ord. PM als pos. ansieht. Für $y = - \sqrt{px}$ muß es noch einen solchen parb. Bogen Amm′m″ auf eben der Seite der Ordinatenaxe, aber auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe, geben, weil hier, bei einerlei Absc. AP, die Ord. Pm den vorigen PM zwar gl. aber entgegengesetzt ist. Dieser Bogen kann auf eben die Art gefunden werden, wie der erste, weil man den Halbkreis sowohl unter als über der Axe beschr. kann.

§ 210. Beide Bogen AMM′M″, Amm′m″ gehören zu einer und eben derselben kr. L., weil die Gleichung., durch welche sie gegeben sind, keine rationale Faktoren hat (§ 135). Auch werden beide Bog. auf einerlei Art gefunden, daß also die Parb. M″Am″, durch die Abscissenl. AQ, so wie der Kr. durch seinen Durchm in gl. und ähnl. Hälften getheilt wird. Diese L. heißt hier die Axe oder der Hauptdiameter der Parb., weil er die Sehne Mm in zwei gl. Theile PM, Pm theilt, welche man zugeordnete Ordinaten, unter einem rechten Winkel APM, zu diesem Hauptdiam. nennt.

§ 211. Anmerk. Die alten Geometer nannten die Sehnen Mm Ordinaten, und ihre Hälften PM, pm Semiordinaten. Dies setzt aber nothw. voraus, daß die Absciſſenl. ein Diam. sei, d. i., eine solche L., durch welche die Sehnen, wie hier, in zwei gl. Theile getheilt werden. Es wird aber bisweilen aus der Gleich. die Absciſſenl. so angenommen, daß sie kein Diam. ist (wie tT in dem Kr. § 132 Fig. 52), auch giebt es L., die gar keinen Diam. haben. Daher haben die neuern solche L. wie PM, Pm, die einer gewiſſen Absc. zugehören, ohne darauf zu sehen, ob sie gl. oder ungl. sind, Ordinaten genannt, weil sich dieser Name bei allen kr. L. anwenden läßt; und in dem letzten Verstande wird auch hier dieses Wort durchgängig genommen. Eine Ord. wird auch öfters eine Applicate genannt.

§ 212. Da man den Werth einer Funktion niemals ganz erschöpft zu haben glauben darf, wenn man nicht die veränderl. Grß., deren Funkt. sie ist, durch alle die verschiedenen Bestimmungen hat gehen laſſen, deren eine Grß. fähig ist (§ 116), so muß man in $y = \pm \sqrt{px}$, anstatt x nicht nur die bereits angenommenen poſ., sondern eine ganze Reihe, sowohl poſ. als neg. Werthe, von o nach den Grenzen $\pm \infty$ zu, substituiren, um zu sehen, was diese Subst. für die beiden Reihen von y (§ 118) geben. Jeder Werth von x läßt sich aber in einer unbestimmten L. geom. darstellen (§ 121), bei welcher man zugl. das poſ. oder neg. in ihr durch die Verschiedenheit der Lage (§ 136) ausdrükken kann. Wollte man nun auf diese Art alle P. der Parb. suchen: so wäre das freilich eine unendlich mühsame Arbeit, mit der man niemals zu Stande kommen würde. Aber das ist auch nicht nöthig. Man will itzt nur die Gestalt der kr. L. wiſſen, die durch die Gleich. gegeben ist, und hier sind oft wenige Substitutionen hinreichend, den Gang der L. zu übersehen und auf die Lage ihrer Schenkel oder

Aeste gegen die angenommene Absc= und Ordinatenaxe mit Zuverlässigkeit zu schließen.

§ 213. Für $x = 0$ ist auch $y = 0$, oder die kr. L. geht hier durch den Anfang der Absc. (§ 152) und wird also die Axe von der Parb. in dem Anfang der Absc. geschnitten. Dieser Ort heißt der Scheitelpunkt der Parabel, die Spitze des Hauptdiam. Nähme man die Absc. verneinend, so wäre für ein solches neg. $x$ der Werth von $y^2$ verneinend, oder $-px$ (weil $p$ hier beständig pos. ist) und wäre alsdann $y = \pm\sqrt{-px}$, oder es wäre der Werth für eine Ord. zu einer neg. Absc., und also die Ord. selbst unmöglich. Die Grße. der neg. Absc. kann hier, wie in andern Fällen (die künftig bei der Hyperbel vorkommen werden) zur Veränderung des Zeichens nichts beitragen, und giebt es also für verneinende Absc. durchaus keine P. der Parb.

§ 214. Für ein pos. $x$ hingegen, bleibt $px$ beständig pos. und wächst mit dem $x$. Also wachsen auch die zugehörigen beiden Ord. $\pm\sqrt{px}$ ohne Aufhören, und können alle Grenzen übersteigen, weil ein solches $x$ jede Grß. übertreffen kann, und die Ord. hier niemals unmöglich werden. Die Parb. geht also mit zwei Aesten längs der unendlichen Abscissenaxe, auf entgegenges. Seiten von ihr, dergestalt fort, daß sie sich von derselben so wie von der Ordinatenaxe unendlich entfernen, doch unendlich weiter von dieser als von jener. Denn wenn man in dem Ausdrucke der Absc. $x = \frac{y^2}{p}$ (§ 208) die Ordinatenaxe $y$ unendlich annimmt, so ist der Werth dieser Absc. $\frac{y^2}{p}$ und also die Absc. selbst unendlich gr. als die unendlich Ord., wenn die Ord. eine Unendliche der ersten Ordnung wird, so ist die

Absc.

Absc. eine Unendl. der zweiten. Da nun hier in dem Anfgsp. der Absc. als dem Scheitel der Parb. beide Coord. einander gl. sind oder vielmehr keine Grß. haben: so kann die Verschiedenheit derselben für die übrigen P. dieser L. nicht anders begreiflich werden, als wenn man annimmt, daß bei gl. einförmiger Zunahme der Ord. die zugehörigen Absc. mit beschleunigter Bewegung wachsen; wie auch der Ausdruck $x = \frac{y^2}{p}$ deutlich zu erkennen giebt, nach welcher für

$$y = 0;\ p;\ 2p;\ 3p;\ 4p;\ 5p;\ 6p;\ \ldots$$

das zugehörige $x = 0;\ p;\ 4p;\ 9p;\ 16p;\ 25p;\ 36p;\ \ldots$ wird, daß also für Ord., die wie die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . fortgehen, die zugehörigen Absc., nach dem Qdr. dieser Zahlen, 0, 1, 4, 9 . . . . zunehmen, wie daraus erhellet, wenn man beide Reihen mit p dividirt oder gl. anfgs $p = 1$ und $x = y^2$ setzt. So lange nämlich $x < p$ oder $< 1$, ist auch die Absc. kl. als die Ord., aber beider Wachsthum ist so verschieden, daß für $x = p$ oder $= 1$ die Absc. die Ord. schon eingeholt hat und ihr gl. ist, von da aber sie nach und nach so weit übertrifft, daß, wenn die Ord. $y = \infty$, die Absc. $x = \infty^2$ wird.

§ 215. Ein Schenkel einer kr. L., der sich entweder von der Ordinatenaxe oder von der Absciſſenaxe, oder, wie hier, von beiden Axen zugl. unendlich entfernt, heißt ein unendlicher Schenkel dieser L. Also hat die Parabel zwei unendl. Schenkel, die immer weiter und weiter auseinander gehen, die aber auf einer Seite der Ordinatenaxe GH liegen.

§ 216. Es seien PM, P′M′ zwei verschiedene Ordin. für die Absc. AP, AP′, so ist, bei unveränderl. Parm. p

$$p \cdot AP = PM^2 \text{ und eben so } p \cdot AP' = P'M'^2 \ (\S\ 207)$$

und $p \cdot AP : p \cdot AP' = PM^2 : P'M'^2$,

oder $AP : AP' = PM^2 : P'M'^2$,

oder die Absc. verh. sich in der Parb. wie die Qdr. der zugehörigen Ord. Es ist aber auch $PM : P'M' = \sqrt{AP} : \sqrt{AP'}$, d. i. die Ord. verh. sich wie die Qdrw. aus den zugehörigen Absc.; daß man also, wenn man in einer L. die Coord. in dem angezeigten Verh. findet, allemal sicher auf eine Parb. schließen kann.

§ 217. Da in der Parb. die Sehnen als die doppelten Semiord. von o bis $\infty$ wachsen (§ 214), so muß es auch in der Axe der Parb. irgendwo einen P., aber auch nur einen, geben, durch welchen die Sehnen dem Parm. und also die Semiord. dem halben Parm gl. wird. Diesen P. in der Axe bestimmt man, wenn man seine Entf. als eine Absc. (x) ansieht, zu welcher man die Semiord. (y) von bestimmter Länge ($\frac{1}{2}p$) schon weiß. Hier wird also aus der unbestimmten Gleich. $y^2 = px$, die bestimmte $\frac{1}{4}p^2 = px$, in welcher $x = \frac{1}{4}p$ die gesuchte Absc. ausdrückt. Nimmt man also $AF = \frac{1}{4}p$, so ist F der verl. P. zu der Semiord. $y = \frac{1}{2}p$. (Fig. 70).

§ 218. Ziehet man aus F an einen bel. P. M (Fig. 70) der Parb. eine gr. L., wie FM, so ist, das Perpd. PM auf die Axe gefällt, in dem rechtwinkligen Tr. FMP allezeit $FM^2 = PF^2 + PM^2$. Da nun $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$ und $PM = y = \sqrt{px}$, so ist, die Werthe gehörig substit.:

$$FM^2 = (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + px = (x + \tfrac{1}{4}p)^2,$$

$FM = x + \frac{1}{4}p$, daß also jedes EM um die best. Grß. $\frac{1}{4}p$ grß. ist, als die dem P. M zugehörige von dem Perpd. MP auf der Axe abgeschnittenen Absc. AP.

§ 219. Dieser P. F, der in vieler Betrachtung merkwürdig ist, wird der Brennpunkt der Parb. genannt; eine Benennung, die in den optischen Wissenschaften dem-

jenigen Ort beigelegt wird, in welchen die Lichtstrahlen so vereinigt und hierdurch so verdichtet werden, daß sie vermögend sind, zu brennen. Stellt also die Parb. MTAtm den Durchschnitt eines parb. Holspiegels durch den Pol und die Axe desselben vor, so wird F ein wahrer Brennp. sein, wenn sich erweisen läßt, daß Lichtstrahlen, die, wie fM, mit der Axe prll., auf diesen Durchschnitt fallen, in der schneidenden Ebene, die hier zugl. die Ebene der Zurückstrahlung ist, bei M nach dem Gesetze der Reflexion so gebrochen werden, daß die W. AMF und KMf einander gleich sind, und sich also alle reflectirte Strahlen in F vereinigen.

§ 220. In dieser Absicht nehme man auf der rückw. verl. Axe nach Gefallen AC $= u$, und richte von A den Perpd. AE $= \frac{1}{2}\sqrt{pu}$ auf: so wird eine gr. L. durch C, E, der Parb. in irgend einem P. begegnen. Diesen P. zu finden, fälle man von einem bel. P. M in der Parb. den Perpd. MP, so ist MP mit AE prll., und AP $= x$, die zugehörige Absc. zu der Ord. $y =$ PM $= \sqrt{px}$. Es giebt aber auch zu AC, AE, CP, d. i. zu $u$, $\frac{1}{2}\sqrt{pu}$, $u + x$ eine vierte Proportionale $= \frac{u + x}{2u}\sqrt{pu}$, die, weil PM mit AE parallel, längs PM fallen muß, und deren Grß. gegen die Ord. PM itzt zu untersuchen ist. Nun ist aber nothw. AP oder $x$ entweder $>$ oder $<$ oder $= u$ oder AC. Man setze also $x = \frac{m}{n} u$, (welcher Ausdruck alle drei Fälle in sich schließt, nachdem $n >$ oder $<$ oder $= m$ gesetzt wird) und substituire diesen Werth von $x$ sowohl in die Proportionale $\frac{u + x}{2u}\sqrt{pu}$, als auch in die Ord. $\sqrt{px}$, so erhält

man für die erste $\frac{m+n}{2m}\sqrt{pu}$, und für die andere $\sqrt{\left(\frac{n}{m}pu\right)} = \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \sqrt{pu}$. Nun kömmt es bei Beurtheilung der gefundenen Werthe darauf an, wie sich $\frac{m+n}{2m}$ $\sqrt{\frac{n}{m}}$, die beiden Fact. zu $\sqrt{pu}$, der Grß. nach, gegen einander verh. Man multipl. beide mit 2m, und bringe m mit unter das Wurzelzeichen: so ist, wenn n und m verschieden, m + n als die Summe zweier L. allemal größer als $2\sqrt{mn}$, die doppelt mittlere Proportionale derselben; wie man leicht sich hiervon überzeugen kann, wenn man über die Summe m + n einen Halbkr. zeichnet und die Proportionale zieht. Es ist also auch $\frac{m+n}{2m}\sqrt{pu}$ allemal grß. als $\sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \sqrt{pu}$, außer, wenn $n = m$, wo $\frac{n}{m}u$ oder $u = x$ Die verläng. CE begegnet also der Parb. in einem P., der zu der Absc. $x = u$ gehört, und hat weiter keinen P. mit ihr gemein, weil für Absc., die kl. oder gr. als u sind, wie Ap, AΠ, die vierten Proportionalen pt, Πr, $\left(\frac{m+n}{2m}\sqrt{pu}\right)$ allemal grß. sind, als die Ord. pM, ΠM, $\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\sqrt{pu}\right)$ und ist daher die verl. CE eine wahre Tang. an diesem P.

§ 221. Es sei also M ein P. der Parb. für die Absc. AP = AC. Man ziehe fM mit der Axe prll.: so ist fM der einfallende und MF der reflectirte Strahl, wenn die W., die beide Strahlen mit der kr. L. bei M machen, einander gl. sind. Nun ist aber $AF = \frac{1}{4}p$ (§ 217) und $FM = x + \frac{1}{4}p$

(§ 218), also FM = AF + AP = AF + AC oder FM = FC. Also ist auch ∠ FMC = ∠ FCM = ∠ fMR wegen der Prlle. fM mit der Axe und folgl. ist auch ∠ AMF = ∠ KMf. Diese Schlüsse gelten für jeden P. der Parb., wenn man nur u, das erst nach Gefallen angenommen worden, allemal gl. groß mit dem x zu dem angenommenen P. in der Parb. nimmt; wo sich alsdann auch AE allemal verändern, und der halben Ord. gleich gemacht werden muß (§ 220). Nun schwinge man die Parb. um ihre unbewegliche Axe AQ, so entsteht hierdurch die Fläche eines parb. Hohlspiegels, auf welchen alle der Axe gleichlaufend, einfallende Strahlen in ihre Zurückstrahlungsebenen dergestalt reflectirt werden, daß sie sich insgesammt in dem P. F als in einer gemeinsch. Spitze vereinigen; und wird also der P. F hier ein wirklicher Brennp.

§ 222. Die Werthe für AF, FM würden (§ 217, 218) daraus bestimmt, daß man F als einen P. der Axe ansah; durch welchen die Sehne einerlei Grß. mit dem Parm. hat und aus dem Vorhergehenden rechtfertigt sich die Erkl., nach welcher ein solcher P. F ein Brennp. genannt wird. Auch ist daselbst diese Erklr. von der Ellipse und Hyperbel, wie sich auch für diese L. auf eine ähnl. Art, wie hier bei der Parabel, erweisen läßt.

§ 223. Eine Parb. aus ihrem Brennp. zu beschr., nehme man auf einer willkührlichen Axe AQ einen P. A zum Scheitel und mache zu beiden Seiten AF = AL = ¼ p, so ist F der Brennp. Hierauf ziehe man unbegrenzte Prpd. durch willkührlich angen. P. der Axe, so ergeben sich hierdurch die bestimmten Absc. AΠ, Ap, AP, AΠ, und ist ΠL, pL, PL, ΠL = x + ¼ p. Mit diesen Zwischenweiten schneide man nach und nach aus F die Perpd., wie solche nach der Ord. folgen, in M und m, so bekommt man jedes-

mal zwei entgegengesetzte P. der Parb. für willkührlich angenommene Absc. Dieses Verfahren ist zwar bequemer als das § 209 erwähnte: es giebt aber, wie jenes, doch niemals alle P., welches auch nicht nöthig, denn man bedient sich beider Methoden vorzüglich dazu, jeden verlangten P. einer Parb., von welcher die Lage der Axe, der Scheitelp. und der Parm. gegeben ist, geom. zu bestimmen, auch kann man nach ihnen prüfen, ob ein gegebener P. in der Parb. sei oder nicht.

§ 224. Wäre unter den gegebenen Dingen, anstatt des Parm., ein P. M außer der Axe gegeben, so wären hierdurch, weil die Entf. eines P von einer L. jederzeit gegeben ist, MP, AP, bestimmt gegebene Coord. y, x, aus welchen man den Parm. $p = \frac{y^2}{x} = PM^2$ (§ 208) leicht finden und hieraus die Parabel verzeichnen kann. So wie nämlich durch zwei P. die Lage einer gr. L., oder durch ihre Endp. zugl. die Lage derselben, und durch drei P., die nicht in einer gr. L. liegen, die Lage und Grß. eines Kr. bestimmt gegeben ist: so sind auch die Parb., Ellipse Hyperbel und überhaupt jede L. durch eine gewisse bestimmte Anzahl von P. gegeben. Die Betrachtung der allgemeinen Gleich. lehrt, daß eine L. der zweiten Ordnung (§ 123), wohin auch der Kr. seiner Gleich. nach gehört, durch fünf P., von denen aber nicht drei in einer gr. L. liegen dürften, bestimmt gegeben ist. Doch sind bisweilen diese L., wie überhaupt der Kr., oder auch hier die Parb., durch wenigere P. gegeben, wenn nämlich gewisse Bestimmungen gegeben sind, die den Mangel der fehlenden P. ersetzen.

§ 225. Es sei jetzt y einmal die Absc. (denn es ist gleichgültig, welche von den beiden veränderlichen Grß.

man hierzu wählen will (§ 139), so ist die Ord. $x = \frac{y^2}{p}$.
Da y hier quadratisch ist, so giebt es für gl. gr. pos. und neg. Absc., gl. gr. durchgängig pos. Ord., die also nur auf eine Seite der Absciſſenaxe fallen. Für $y = 0$ ist auch $x = 0$ und geht also die kr. L. durch den Anfang der Absciſſen; auch wird der Werth der Ord. x für alle Absc. niemals unmöglich, weil x nur von der ersten Potenz. Also würde eine Parb. nach dieser Annahme verzeichnet, von der, § 209 Fig. 69, in nichts unterschieden sein, als daß, so wie die veränderl. Grß. in der Gleich., also auch hier die Coord. und ihre Axen bloß verwechselt wären, und daß hier AII, IIM die Coord. u zeben dem P. M sind, zu dem vorher AP, PM gerechnet wurden. Auch kann man in $x = \frac{y^2}{p}$ die Absc. (y) in Werthen von p nehmen, welches in gewiſſen Fällen bequem ist.

§ 226. Die leichteste Art, die P. in der Parb. geom. zu best., ist folgende: Auf der Absciſſenaxe AQ (Fig. 71) nehme man AB = p, und ziehe BD mit der Ordinatenaxe AC prll. Nun schneide man eine willkührl. Absc. AE auf AQ ab und trage die Länge dieser Absc. AE auch auf BD, aus B in e und ziehe Ae, so schneidet diese Ae die aus E mit AC prll. gezogene EN in dem P. M und bestimmt dadurch die zugehörige Ordin. EM zu der angenommenen Absc. AE. Denn weil $\triangle ABe \backsim \triangle AEM$,

so ist AB : Be = AE : EM,

d. i. $p : y = y : x$ oder $x = \frac{y^2}{p}$,

die Gleich. für die Parb. Auf eben die Art findet man mehrere P.; auch ist klar, daß für Absc. wie AH, die grß. sind als AB, die L. Ah verl. werden muß, bis sie PH schnei-

det. Eben dieses Verfahren giebt auf der andern Seite von AC den zweiten Ast AV der Parabel, und ist dem andern um so mehr vorzuziehen, weil es sich auch bei schiefw. Coord. wie für rechtw. gl. bequem anwenden läßt.

§ 227. Anmerk. Weil für $p=1$ in der Parb. $x=y^2$ oder die Ord. den Quadr. der Absc. proport. sind, und also für die PM (Fig. 69) oder AII, die wie die natürlichen Zahlen fortgehen, die zugehörigen AP oder IIM wie die Quadr. dieser Zahlen wachsen (§ 214), so nehme man auf der Axe GH ein AII willkührlich und mache alsdann AII' = 2 AII; AII'' = 3 AII rc. Läßt man nun die zweite Axe AQ sich längs der ersten von A nach G zu dergestalt bewegen, daß sie sich immer prll. bleibt, und die von ihr durchlaufenen Räume AII; AII'; AII'' mit der Zeit proportionirt, in welcher sie aus A in II gekommen: so werden von AQ in gl. Zeiten gl. Räume zurückgelegt, und ist also die Bewegung dieser Axe gleichförmig. Mit dieser prll. fortlaufenden Axe AQ verbinde man noch die Bewegung des P. A auf ihr von A nach Q zu, dergestalt, daß die Bewegung dieses P. in quadratis. Verh. zunehme, und die Räume IIM; II'M'; II''M'', die in propt. Zeiten mit AII; AII'; AII''; zurückgelegt werden, sich wie die Qdr. dieser Zeiten verh., so rückt der P. A mit und auf der L. AQ mit beschleunigter Bewegung fort und beschr. in seinem Gange den parb. Bog. AMM'M'', und eben so den Bog. Amm'm'', wenn die Bewegung von A und AQ eben so unterwärts nach H fortgesetzt wird. Auf diese Art kann man die Erzeugung einer Parb. als aus einer doppelten Bewegung zusammengesetzt sich denken: aus einer gleichförmigen einer gr. sich best. prll. bleibenden L., und einer beschleunigten eines in ihr fortlaufenden Punktes.

## Sechstes Kapitel.

### Von den Eigenschaften der Ellipse, in einer Ebene betrachtet.

§ 228. Erkl. In einer Ebene sei die gr. L. Aa der Größe nach gegeben, auf ihr zwei feste P. F, f, in gl. Entf. von ihren Endp., so ist die Ellipse eine Curve, in welcher die Summe FM + fM der Entfern. eines jeden P. M von diesen zwei P. F, f, welche wir die Brennpunkte nennen wollen, beständig gl. der gegebenen gr. L. Aa, welche wir die Axe von dieser Curve nennen wollen, ist (Fig 72).

§ 229. Zus. Aus dieser Erkl. folgt, daß man leicht die Ellipse durch eine stetige Bewegung beschr. kann, wenn man in den Brennp. F, f die Enden eines Fadens fMF, der so lang als die Axe Aa ist, und den man immer gespannt vermittelst eines Stiels M hält, den man von A gegen a zu bewegt, es sei über oder unter der Axe Aa. Noch ist es einleuchtend, daß die Endp der Axe Aa P. der Curve sind; denn, wenn der beschreibende Stiel M in A oder in a angekommen ist, so hat man immer AF + Af, aF + af = Aa. Ueberdem folgt hieraus noch ferner, daß die Curve ein Kr. wird, wenn die Entf. Ff der Brennp. Null ist; denn in diesem Falle sind immer die Entf. FM unter einander gl und zwar gl. der halben Axe Aa.

§ 230. 1) Die Endp. A, a der Axe Aa werden die Scheitel der Curve. 2) Die Mitte C der Axe ist der Mittelpunkt. 3) Der Perpd. BCb ist auf der grß. Axe Aa,

der durch den Mittelp. geht und sich auf beiden Seiten in der Ellipse endiget, heißt die kleine Axe oder die zweite. 4) Eine bel. gr. L. MP oder MQ von einem P. M der Curve perpd. auf eine der Axen ist eine Ordinate auf diese Axe. 5) Die Theile AP, aP oder BQ, bQ einer Axe, die auf dieser Axe durch irgend eine ihrer Ord. gemacht werden, sind die Abscissen derselben Axe. 6) Eine Ord. und ihre corresp. Absc. werden im allgem. Coordinaten genannt. 7) Eine dritte Proportionale zu den beiden Axen heißt Param. zu der Axe im ersten Gliede der Propt.

§ 231. Anmerk. Wir werden in der Folge in diesem Kap. setzen, die grßt. Axe Aa = 2a, die zweite Axe Bb = 2b, die Entfern. der Brennp. Ff vom Mittelp. C = e nennt man die Excentricität der Ellipse, also ist die Entf. Ff der Brennp. = 2e, der Parm. der gr. Axe = 2p und der der kl. Axe = 2π. Die gedachten Parm. werden durch folgende zwei Proportionen bestimmt:

$$2a : 2b = 2b : 2p, \text{ also } 2p = \frac{2b^2}{a} \text{ oder } p = \frac{b^2}{a} \text{ und}$$

$$2b : 2a = 2a : 2\pi, \text{ also } 2\pi = \frac{2a^2}{b} \text{ oder } \pi = \frac{a^2}{b};$$

woraus sich ergiebt, daß die Parm. von der halben gr. Axe und von der halben kl. Axe p und π sein werden. Eben so nehmen wir die unbestimmten CP = x und PM = y; woraus folgt, daß die Absc. AP, aP, a + x und a — x sein werden, wenn der P. P in den Theil Ca fällt, und im Gegentheil wird AP = a — x, und aP = a + x, wenn P auf den Theil CA fällt. In dieser Voraussetzung des Ursprungs der xen im Mittelp. C kann man auch den nämlichen P. C als den Anfangsp. der Absc. ansehen. Sieht man die CP oder die xen, die von C nach a zu gehen, als pos. an, so sind die, welche nach dem entgegengesetzten Endp. A der Axe gehen, die neg. xen. Noch ist es gut zu bemerken, daß bei der nämlichen Voraussetzung der Ord. PM auf der gr. Axe gl. sind den Absc. CQ auf der kl. Axe; und

umgekehrt. Zuweilen werden wir auch den Ursprung der xen in A oder in a in einem der Scheitel der Curve annehmen, und wenn in diesem Falle eine der Absc. AP = x ist, so ist die andere Absc. aP = 2a − x. Ueberhaupt muß man wissen, daß jeder P. in der Ebene einer Curve als Anfangsp. der Coord. genommen werden könnte; aber es war natürlich, ihm im Mittelp. oder in einem Scheitelp. der Curve zu fixiren, weil diese P. die merkw. sind, und weil sie die Rechnung erleichtern.

§ 232. I. Lehrs. Die halbe kleine Axe BC ist die mittlere Proportionale zwischen der Entfernung AF, aF eines Brennpunkt F von den Endpunkten der großen Axe. (Fig. 72).

Bew. Weil CF oder Cf = e und CA oder Ca = a, so ist Af = a + e, und aF = a − e; man muß also beweisen, daß

$$a + e : b = b : a - e; \text{ oder daß } b^2 = a^2 - e^2.$$

Durch Constr. ist BC in der Mitte von Ff perpd., und überdem ist B einer der P. in der Ellipse, mithin sind BF, Bf von diesem P. nach den Brennp. F, f, einander gl. und gl. der halben gr. Axe Aa; demnach Bf = a; wegen des rechtw. Dr. BCf hat man $BC^2 = Bf^2 - Cf^2$, oder, wenn man die analytischen Werthe setzt, $b^2 = a^2 - e^2$, woraus man zieht

$$a + c : b = b : a - e.$$

§ 233. II. Lehrs. Das Quadrat $PM^2$ einer beliebigen Ordinate PM auf der großen Axe verhält sich zu dem Rectangel AP . aP seiner Abscissen, wie das Quadrat $CB^2$ der kleinen Axe zu dem Quadrat $CA^2$ der halben großen Axe; oder, welches einerlei, man hat für jede Ordinate $y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2$.

Bew. Aus dem Endp. M der Ord. PM ziehe nach dem Brennp. F, f die Vectoren MF, Mf, und aus diesem

P., als Mittelp. beschr. mit dem Halbm. MF, einen Kr., der die Axe in zwei P. F, G und den Vector fM ebenfalls in zwei P. K, D schneiden wird. Durch die Bildung der Ellipse hat man fM + MF = 2a, daher auch fM + MD oder fD = 2a. Halbirt man also diese L. in L, so hat man fL oder LD = a; woraus folgt, daß fK = 2LM; denn fK ist = fD − DK oder 2LD − 2MD, hingegen LM = LD − MD. Eben so zeigt man, daß fG = 2CP (2x), denn fG = fF − FG = 2CF − 2FP und CP = CF − FP. Wegen der Eigensch. des Kr. haben wir

$$fD : fG = fF : fK$$

oder $2a : 2x = 2e : 2LM$ oder $= \frac{2ex}{a}$,

$$a : x = e : \frac{ex}{a}.$$

Hieraus

oder $a : x = a + e : x + \frac{ex}{a}$,

und $a : x = a - e : x - \frac{ex}{a}$;

ferner hieraus

$$a : a + x = a + e : a + e + x + \frac{ex}{a} = fM + fP,$$

$$a : a - x = a - e : a - (e + x) + \frac{ex}{a} = fM - fP.$$

Multipl. wir die letzten zwei Propt. Glied für Glied, so hat man

$$a^2 : a^2 - x^2 = a^2 - e^2 : fM^2 - fP^2 = PM^2.$$

Da $a^2 - e^2 = b^2$ (§ 232) und $PM^2 = y^2$,

so ist $y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2$.

§ 234. Zus. 1. Hieraus folgt, daß die Qdr. der Ord. auf der Hauptaxe sich immer zu einander verh., wie die Prod. aus den corresp. Absc., d. h. wenn PM und Qm zwei

bel. Ord. auf dieser Axe sind, deren Absc. AP, aP, AQ, aQ, so hat man

$PM^2 : Qm^2 = AP . aP : AQ . aQ$, weil $y^2$ zu $a^2 - y^2$ immer in dem best. Verh. von $b^2 : a^2$ ist

§ 235. Zus. 2. Aus der Propt. $y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2$, folgert man $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, oder $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; diese Gleich. drückt auf eine allgem. Art alle Eigenschaften der auf die Hauptaxe sich beziehenden Coord. einer Ellipse aus, unter der Voraussetznng, wie hier, daß der Mittelp. C der Anfgsp. der xen sei. Wenn man in dieser Gleich. $x = 0$ setzt, so hat man $y^2 = b^2$ oder $y = \pm b$, woraus folgt, wie man im Voraus weiß, daß die Ord. BC durch den Mittelp. über und unter der Axe gl. der halben kl. Axe Setzt man $x = \pm a$, so hat man $y = 0$, welches zeigt, daß die Ellipse ihre gr. Axe in ihren beiden Endp. schneidet. Nimmt man $x = \pm e$, so hat man

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 e^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2 - b^2 e^2}{a^2} = \frac{(a^2 - e^2) b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2},$$

(weil $a^2 - e^2 = b^2$); folgl. $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Aber aus der Propt. $a : b = b : p$ haben wir $p = \frac{b^2}{a}$; folgl. $2y = 2p$, d. h. die doppelte Ordinate auf der Axe durch einen der Brennp. ist gl. dem Parm. der grß. Axe.

§ 236. Zus. 3. Aus der Proport: $a : b = b : p$, zieht man $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}$; setzt man nun in der Gleich. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ statt $\frac{b^2}{a^2}$ dessen Werth $\frac{p}{a}$, so wird sie $y^2 = \frac{p}{a}(a^2 - x^2)$ $= ap - \frac{px^2}{a}$; diese Gleich. nennt man die Gleich. mit dem

Parameter. Sie ist eben so geschickt, durch Rechnung alle P. der Ellipse zu finden, als die Gleich. mit den Axen.

§ 237. III. Lehrs. Das Quadrat $MQ^2$ von einer Ordinate MQ auf der kleinen Axe Bb verhält sich zum Rectangel $BQ \cdot bQ$ oder $CB^2 - CQ^2$ ihrer Abscissen, wie das Quadrat $CA^2$ der halben großen Axe CA sich zum Quadrat $CB^2$ der halben kleinen Axe CB verhält. (Fig. 72).

Beweis. Die Gleichung $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ giebt $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, woraus $x^2 : b^2 - y^2 = a^2 : b^2$ oder $MQ^2 : BQ \cdot bQ$ oder $CB^2 - CQ^2 = CA^2 : CB^2$.

§ 238. Zus. 1. Die Quadrate der Ord. auf der zweiten Axe verh. sich also unter sich, wie die Prod. der correspondirenden Absc. Denn das Verh. von dem Qdr. einer bel. Ord. zu dem Rect. aus ihren Absc. ist beständig dem Verh. des Qdr. der halben grß. Axe zu dem Qdr. der halben kl. Axe gl.

§ 239. Zus. 2. Aus $b : a = a : \pi$ (§ 231) folgt $b^2 : a^2 = b : \pi$, oder $a^2 : b^2 = \pi : b$; man hat für eine bel. Ordin. QM auf der kl. Axe $x^2 : b^2 - y^2 = a^2 : b^2$; also auch $x^2 : y^2 - b^2 = \pi : b$, woraus $x^2 = \pi b - \frac{\pi y^2}{b}$, welche auch, wie die vorhergehenden, zur Beschr. der Curve dienen kann.

§ 240. Zus. 3. Wir haben (§ 236) für jede bel. Ord. PM auf der ersten Axe gefunden $y^2 = ap - \frac{px^2}{a}$. Woraus folgt, daß das Qdr. einer bel. Ord. gl. dem Rect. aus der halben grß. Axe und ihr Parm. p, weniger einem ihr ähnl.

Rect., dessen Seiten x und $\frac{px}{a}$; denn es leuchtet ein, daß $a : p = x : \frac{px}{a}$, die Seiten x und $\frac{px}{a}$ des Rect. $\frac{px^2}{a}$ sind also proportional den Seiten a und p des Rect. ap; folgl. sind diese zwei Rect. einander ähnl. Dieselben Schlüsse muß man auch für die Ord. der 2ten Axe machen, deren Gleich. $x^2 = \pi b - \frac{\pi y^2}{b}$ auf dieselbe Weise, wie die erste, combinirt ist.

§ 241. 1. Aufg. Eine Ellipse AMa und ihre Brennpunkte F, f sind gegeben, man soll an einen gegebenen P. M der Curve eine Tangente ziehen. (Fig. 73).

Aufl. und Bew. Ziehe aus M die Vectoren MF, Mf; aus demselben P., als Mittelp., beschr. einen Kr., der den so viel als nöthig verl Vector fM in einem P. D schneidet, zu welchem man FD zieht. Nachgehends zieht man durch die Mitte E dieser L. und den gegebenen P. M die ME, welche die verl. Tg. seyn wird.

Um sich davon zu überzeugen, ist es hinreichend, zu beweisen, daß der P. M der einzige ist, welcher der ME an der Ellipse angehören kann. Durch Constr. ist ME auf FD in ihrer Mitte perpd. Sie geht also durch alle von D und F gl. weit liegende P.; zieht man also von irgend einem von M verschiedenen P. m die mf, mF, mD, so hat man $mF = mD$; setzt man also beiderseits mf zu, so ist $mf + mF = mf + mD$, aber wegen des Tr. fmD ist $fm + mD > fD$ durch Constr. gl. der grß. Axe Aa; also auch $mf + mF > Aa$, woraus ganz evident folgt, daß der P. m der Ellipse nicht angehören kann.

§ 242. Zus. Hieraus folgt, daß die Tang. EM gl. W. FME, fMe auf einerlei Seite mit den aus Berührungsp. M

gezogenen Vectoren. Der $\angle$ fMe = DME, und derselbe $\angle$ EMD = EMF, weil die L. MD, MF, ED, FE durch Constr. gl. sind. Wenn daher einer der Brennp. Fe in leuchtender ist, so werden alle aus diesem P. ausgehende Strahlen von der Curve nothwendig, nach den andern Brennp. zu, zurückgeworfen. Diese Eigenschaft ist bekanntlich auch in dem Kreise wahr.

§ 243. Zus. 2. Es fließt hieraus noch: daß wenn man durch den Mittelp. C zur Mitte E der FD die CE zieht, und CH prll. mit der Tang. MT, so hat man CE oder MH = der halben grß. Axe Aa. Denn da Ff, FD, die eine in C, die andere in E halbirt ist, so werden die Tr. CFE, fFD ähnl. sein; man wird also haben CF : CE = fF : fD; aber CF ist die Hälfte von fF; folgl. wegen des Prllgrms. CHME wird auch CE oder MH gl. der Hälfte von fD, die durch Constr. gl. Aa ist.

§ 244. Zus. 3. Es ist leicht, zu sehen, daß diese Constr. auch in dem Falle Statt findet, in welchem man von einem außerhalb der Ellipse gegebenen P. m eine Tang. an diese Curve ziehen soll. Dieserhalb, nachdem man aus dem gegebenen P. m zu den Brennp. f, F die mf, mF gezogen, beschr. man mit einer von ihnen mF als Halbm., aus m einen Kr.; nachgehends aus dem Brennp. f mit einem Halbm. fD = aA beschr. man einen neuen Kr., der den ersten in einem P. D schneiden wird, zu welchem man aus dem Brennp. F die FD zieht: endlich durch den gegebenen P. m und die Mitte E von FD zieht man mE, die fD in einem P. M schneidet und die Ellipse in diesem P. berührt. Diese Constr. enthält ihren Bew. in sich selbst. Es ist sichtbar, daß man eine ähnl. Operation machen kann, wenn man sich des Halbm. mf bedient, wie des Halbm mF; welches eine andere Tang. geben würde, die durch den P. m gehet,

und

und die Ellipse in dem Theil aB berührt. Uebrigens hat dieses nicht den Sinn, als wenn die erste Constr. nicht hinreichte um diese Tang. zu geben. Die Figur allein reicht hin, zu zeigen, daß jeder Halbm. mf, MF ebenfalls die beiden Tang. giebt.

§ 245. Erkl. 1) Errichtet man im Berührungsp. M auf der Tang. MT einer Ellipse einen Perpd. MR, der sich auf der Axe in R endiget, so heißt dieser Perpd. die dem P. M corresp. Normale, 2) Der Theil RP auf der Axe zwischen den Endp. R der Normale und den Endp. P der Ordin. heißt die Subnormale. 3) Der Theil MT auf der Tang. zwischen dem Berührungsp. M und dem Treffp. T der verl. Axe mit der Tg. heißt die Tangente. 4) Man nennt eben so Subtangente den Theil PT der Axe zwischen den Endp. der Ordin. PM des Berührungsp. M und des Treffp. T der Axe mit der Tang. MT.

§ 246. II. Aufg. Den analytischen Ausdruck für die Subnormale PR zu finden. (Fig. 73.)

Aufl. Da MR, FD, beide durch Constr. auf der Tang. MT perpd., so sind sie prll. Also $\triangle fFD \backsim \triangle fRM$ und daher $fD : fF = fM : fR$

oder $2a : 2e = a + \frac{ex}{a}$ (§ 233) $: fR = \frac{a^2e + e^2x}{a^2}$.

Zieht man fR von $fP = e + x$ ab, so findet man

$RP = \frac{a^2x - e^2x}{a^2} = \frac{a^2 - e^2}{a^2} \cdot x$, oder wenn man $b^2$ statt $a^2 - e^2$ setzt, $RP = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{a}$, wenn man den Parm. der Hauptaxe einführt.

§ 247. Zus. 1. Aus der Gleich. $RP = \frac{b^2}{a^2}x$ folgt

$a^2 : b^2 = x : RP$, oder $CA^2 : CB^2 = CP : RP$, woraus folgt, daß die Absc. CP immer grß. als die Subn. PR, so lange $CA > CB$; der P. R kann also in derselben Voraussetzung niemals in den Mittelp. C fallen. Im Gegentheile, wenn die Axen gl. sind, wie im Kr., so hat man immer $CP = RP$, und folgl. müssen alle im Berührp. auf der Tang. eines Kr. errichteten Perpd. durch den Mittelpunkt C gehen.

§ 248. Zus. 2. Macht man $x = a$, so wird der Ausdruck $\frac{b^2x}{a^2}$ in $\frac{b^2}{a} = p$ verwandelt. Woraus folgt, daß, wenn der P. P in A fällt, die Subn. gl. dem Parm. der halben gr. Axe ist, und folgl. ist die Krümmung der Ellipse in diesem P. gl. der Krümmung eines Kr., dessen Halbm. dieser Parm. ist. In der Folge werden wir zeigen, wie man die Krümmung der Ellipse in einem bel. P. bestimmen kann.

§ 249. III. Aufg. Den analytischen Ausdruck für die Subtangente PT zu finden. (Fig 73.)

Aufl. Da der $\triangle RMT$ durch Constr. rechtw. und PM aus der Spitze des rechten W. auf die Hypotenuse perpd. ist, so hat man

$$RP : PM = PM : PT; \text{ also } PT = \frac{PM^2}{RP} = \frac{y^2}{\text{Subn.}}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{a^2 - x^2}{x},$$

§ 250. Zus. 1. Aus der Gleichung $\frac{a^2 - x^2}{x}$ folgt

$$x : (a - x) = a + x : PT$$

also $x : a = a + x : aP + PT$ oder $AC + CT = a + CT$, mithin $ax + CT \cdot x = a^2 + ax$, woraus $CT = \frac{a^2}{x}$.

Man findet denselben Werth von CT, wenn man x zu dem Ausdruck von PT addirt; folgl. hat man noch folgende Proportion

$$x : a = a : CT \text{ oder } CP : CA = CA : CT.$$

§ 251. Zus. 2. Diese letzte Propt. kann dienen, um mittelst der Axe an der Ellipse eine Tang. zu ziehen, wenn man die Brennp. nicht kennt. Zu diesem Behuf zieht man durch den gegebenen Berührungsp. M auf die Axe die Ord. MP, deren Absc. also CP sein wird; sucht man zu dieser Absc. CP und zu der halben gr. Axe CA eine dritte Propt. CT und zieht MT, so ist diese L. ganz augenscheinlich eine Tang. in M, weil CP : CA = CA : CT ist.

§ 252. Zus. 3. Wenn man CA = a von $CT = \frac{a^2}{x}$ abzieht, so hat man $AT = \frac{a^2}{x} - a = \frac{a^2 - ax}{x} = \frac{a(a-x)}{x}$; woraus folgt

$$x : a = a - x : AT,$$

$$\text{oder } CP : CA = AP : AT;$$

diese Propt. könnte ebenfalls dienen, die Tang. für einen bel. P. M zu bestimmen, ohne die Brennp. zu kennen.

§. 253. Zus. 4. Da man die algebr. Werthe der L. RP, PM, PT hat, so wird es leicht, die analytischen Ausdrücke von der Norm. MR, von der Tang. MT, und der L. CR, AR oder aR und RT zu finden. 1) Der rechtw. △RPM giebt

$$MR = \sqrt{(TM^2 + RP^2)} = \sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^4x^2}{a^4}\right)}.$$

2) Der rechtw. △MPT giebt gleichfalls

$$MT = \sqrt{(MP^2 + PT^2)} = \sqrt{\left[\frac{(a^2-x^2)b^2}{a^2} + \frac{(a^2-x^2)^2}{x^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{ax}\sqrt{[(a^2 - x^2)(b^2x^2 - a^2x^2 + a^4)]}.$$

3) Wenn man RP $\left(\frac{b^2x}{a^2}\right)$ von CP (x) abzieht, so findet man $CR = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x = \frac{e^2x}{a^2}$. 4) Zieht man CR von AC (a) ab, und setzt zu der nämlichen L. AC oder aC die CR hinzu, so findet man AR oder aR $= \frac{a^3 \mp a^2x \pm b^2x}{a^2}$ $= \frac{a^3 \pm e^2x}{a^2}$. 5) Endlich, wenn man CR von CT $\left(\frac{a^2}{x}\right)$ (§ 250) abzieht, so ergiebt sich

$$RT = \frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{a^2x} = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2x}.$$

§ 254. Zus. 5. Führt man in den so eben gefundenen Ausdrücken den Parm. ein, so erhält man

1) $MR = \sqrt{\left(ap - \frac{px^2}{a} + \frac{p^2x^2}{a^2}\right)}$.

2) $MT = \sqrt{\left[\frac{(a^2 - x^2)(px^2 - ax^2 + a^3)}{ax^2}\right]}$.

2) $CR = x - \frac{px}{a} = (a - p)\frac{x}{a}$.

4) AR oder aR $= a \mp x \pm \frac{px}{a} = \frac{a^2 \mp ax \pm px}{a}$.

5) $RT = \frac{a^3 + px^2 - ax^2}{ax}$.

§ 255. IV. Aufg. Angenommen, man habe aus M die Ordinate MQ auf der kleinen Axe CB gezogen und die Normale MR verlängert, bis sie die kleine Axe in r trifft, so soll man den analytischen Ausdruck von der auf der kleinen Axe Bb genommenen Subnormale Qr finden. (Fig. 73.)

Aufl. Die ähnl. Tr. RPM, MQr geben

$$RP : PM = QM : Qr,$$

oder $\frac{b^2x}{a^2} : y = x : Qr = \frac{a^2y}{b^2}$ oder $\frac{\Pi y}{b}$.

§ 256. Aus dem Ausdruck $Qr = \frac{a^2y}{b^2}$ folgt, daß man für eine auf der zweiten Axe genommenen Subn. nachstehende Propt. hat

$b^2 : a^2 = y : Qr$; oder $CB^2 : CA^2 = CQ : Qr$.

Da nun $CB^2$ immer kl. als $CA^2$, so wird die Absc. CQ auch immer kl. als die Norm. Qr sein; und folgl. wird der P. r in Betreff des P. Q immer jenseits des Mittelp. C liegen. Macht man $y = b$, oder, welches einerlei, $CQ = CB$, so ist auch $Qr = \Pi$; woraus wiederum folgt, daß die Krümmung der Ellipse in B gl. der eines Kr. ist, dessen Halbm. gl. dem Parm. der halben kl. Axe ist.

§ 257. V. Aufg. Es sei immer noch QM die Ordinate auf der zweiten Axe und die Tang. MT so weit verlängert, bis sie die kleine Axe in t trifft; man soll die Subtangente Qt auf der kl. Axe finden.

Aufl. Die rechtw. ähnl. Tr. rQM, MQt geben

$$Qr : QM = QM : Qt;$$

oder $\frac{a^2y}{b^2} : x = x : Qt = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{y}$.

Setzt man $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$ (§ 237), so hat man

$$\text{Subtang.} = Qt = \frac{b^2 - y^2}{y}.$$

§ 358. Zus. 1. Setzt man $CQ = y$ zu $Qt = \frac{b^2 - y^2}{y}$ hinzu, so findet man $Ct = \frac{b^2}{y}$; woraus folgt, daß man auch für die zweite Axe $CQ : CB = CB : Ct$.

oder $y : b = b : Ct = \frac{b^2}{y}$ hat;

eine Propt., die ebenfalls mittelst der kl. Axe dienen kann, Tang. zu ziehen.

§ 159. Zus. 2. Nachdem man die analytischen Ausdrücke von den L. rQ, QM, Qt kennt, so wird es leicht sein, die Ausdrücke von der sich in der zweiten Axe endigenden Tang. Mt von der Norm. Mt, so wie die L. Cr, Br oder br und tr zu finden. Hier bloß die Resultate zu eigener Uebung:

1) $\mathrm{Mt} = \sqrt{(a^2y^2 + b^4 - b^2y^2)} \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - y^2)}}{by}$.

2) $\mathrm{Mr} = \frac{a}{b^2} \sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}$.

3) $\mathrm{Cr} = \frac{a^2y - b^2y}{b^2} = \frac{e^2y}{b^2}$.

4) $\mathrm{Br}$ oder $\mathrm{br} = \frac{b^3 \pm a^2y \mp b^2y}{b^2}$ oder $\frac{b^3 \pm e^2y}{b^2} =$ $b \pm \frac{e^2}{b^2} y$.

5) $\mathrm{tr} = \frac{b^4 + a^2y^2 - b^2y^2}{b^2y} = \frac{b^2}{y} + \frac{e^2y}{b^2}$.

§ 260. Zus. 3. Setzt man in den vorhergehenden Ausdruck $b\Pi$ statt $a^2$, so finden wir

1) $\mathrm{Mt} = \sqrt{(b\Pi y^2 + b^4 - b^2y^2)} \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - y^2)}}{by}$.

2) $\mathrm{Mr} = \sqrt{\left(b\Pi - \frac{\Pi y^2}{b} + \frac{\Pi^2 y^2}{b^2}\right)}$.

3) $\mathrm{Cr} = \frac{\Pi y}{b} - y$.

4) $\mathrm{Br}$ oder $\mathrm{br} = b \pm \frac{\Pi b}{b} \mp y$.

5) $\mathrm{tr} = \frac{b^2}{y} - y + \frac{\Pi y}{b}$, oder $\frac{b^3 + \Pi y^2 - by^2}{by}$.

§ 261. Anmerk. Es ist nicht nöthig, bemerklich zu machen, daß die so eben gemachten Rechnungen um die Ausdr. der L. PR, PT, MR, MT; CR, CT; AR, AT oder aR, aT und ihre homol. auf der kl. Axe zu finden, sich auf die Annahme des Ursprungs der xen im Mittelp. C beziehen. Hätte man den Anfangsp. der xen in jedem andern P. der Axe fixirt, so würden die nämlichen L. ohne einen verschiedenen Ausdruck gehabt haben, ihren absoluten Werth zu ändern. Wir wollen bei dieser Materie nicht länger verweilen, um so mehr, da man in dem 8. Kap. die algebr. Ausdr. von allen diesen L. finden wird, indem man den Anfangsp. der Absc. in einem der Scheitel der Curve annimmt. Alle bisher untersuchten Eigenschaften betrachten die Ellipse in Bezug auf ihre Axen; in dem übrigen Theil dieses Kap. wollen wir zeigen, daß alle diese Eigenschaften auch in Betreff der Diam. dieser Curve Statt haben; man nennt jede gr. L. die durch den Mittelp. gehet und sich auf beiden Seiten in der Ellipse endiget, Diameter. Um diesen Theil von der Theorie der Ellipse, so viel als möglich, zu erleichtern, so werden wir von dem Verh. das diese Curve mit einem über ihrer gr. oder kl. Axe beschr. Kr. hat, Gebrauch machen. Um ferner unseren Bew. alle geom. Strenge zu geben, so wollen wir den folgenden uns durchaus nothwendig scheinenden Lehrsatz aufstellen.

§ 262. Lehns. **Wenn durch die Endpunkte einer geraden Linie PQ zwei beliebige Parallelen PM, QN gezogen werden, man und durch die nämlichen Punkte zwei andere Parallelen PR, QS proportional der erstern zieht, so werden die durch M, N, R, S gezogenen und so weit als nöthig verlängerten die eben nöthigenfalls verlängerte PQ, in einem und ebendemselben P. A treffen. (Fig. 74).**

Bew. Angenommen, MN treffe PQ in A, und RS treffe PQ in einem andern P. B; wir müssen nun beweisen, daß A und B zusammenfallen müssen; oder, welches einerlei, daß AP = BP. Da nun PM ∥ QN und PR ∥ QS, so sind die Tr. APM, AQN; BPR, BQS ähnl.

Die ersten geben AP : AQ = PM : QN
und nach der Voraussetzung PM : QN = PR : QS;
die Tr. BPR, BQS geben PR : QS = BP : BQ,
folgl. AP : AQ = BP : BQ,
also auch AP : AQ — AP = BP : BQ — BP,
oder AP : PQ = BP : PQ; folgl. AP = BP, weil die Hinterglied. gl sind.

§ 263. Zus. Da PQ eine L. ist, so kann sie so klein als man will gedacht werden, der Lehrsatz wird also noch wahr sein, wenn selbst diese L. unendlich klein ist. Es ist nicht weniger einleuchtend, daß die Lage der L. PM, QN, PR, QS gegen PQ der Wahrheit des Satzes keinen Eintrag thut; alles hängt von ihrer Paralleletät und ihrer Proportionalität ab.

§ 264. IV. Lehrs. Hat man über die Axen einer gegebenen Ellipse einen Kreis beschrieben; und errichtet in einerlei Punkt der gemeinschaftlichen Axe eine Ordinate des Kreises und der Ellipse, so verhält sich jede Ordinate der Ellipse zu der correspondirenden Ordinate des Kreises, wie die nicht gemeinschaftliche halbe Axe zu der gemeinschaftlichen halben Axe. (Fig. 75).

Bew. Es sei aNDA ein über der grß. Axe beschr. Kr., und alle Ord. PM, PM der Ellipse verl. man, bis sie den Kr. in N, N treffen. Es sei ebenfalls über die kl. Axe Bb ein anderer Kr. BEbc beschr., und die Ord. QN, QN dieses Kr. seien verl., bis sie die Ellp. in M, M treffen. Es muß bewiesen werden

1) daß PM : PN = CB : CA. 2) daß QM : QN = CA : CB.

1) Wir haben (§ 233) gesehen, daß

$$PM^2 : AP \cdot aP = CB^2 : CA^2,$$

aber wegen des Kr. aNDA ist $aP \cdot AP = PN^2$,

mithin $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CA^2$, und, die Wurzeln ausgezogen $PM : PN = CB : CA$.

2) Es ist (§ 237) bewiesen, daß

$$QM^2 : BQ . bQ = CA^2 : CB^2;$$

aber, wegen der Eigenschaft des Kr. BNEbe ist

$$BQ . bQ = QN^2,$$

folglich auch $QM^2 : QN^2 = CA^2 : CB^2$,

demnach $QM : QN = CA : CB$.

§ 265. Zus. Aus diesem Lehrs. folgt, daß man die Ellipse als einen Kr. betrachten kann, in welchem alle Ord. in einem beständigen Verh. proportionirt verl. oder verkürzt sind. Wenn die grß. Axe dem Kr. und der Ellipse gemein ist, alsdann ist diese Curve durch die nach dem Verh. der halben kl. Axe zur halben grß. Axe verkürzten Ord. gebildet. Im Gegentheil, wenn die kl. Axe dem Kr. und der Ellipse gemein ist, alsdann muß man begreifen, daß man alle Ordin. des Kr. in der Verh. der kl. zur grß. Axe der so gebildeten Ellipse vergrößert hat.

§ 266. Erkl. Denken wir uns immer noch einen über der grß. Axe der Ellipse beschr. Kr., u. zieht man in diesem Kreise zwei bel. auf einander perpd. Diam. gG, lL, und durch die Endp. L, G dieser Diam. die Perpd. LI, GK auf der Axe CA, welche die Ellipse in F und E treffen; so werden die aus dem Mittelp. C nach denselben P. gezogenen L. CF, CE corresp. Diam. in Bezug auf den Durchm. Gg, lL des Kr. genannt. Dieselben L., in der Ellipse betrachtet, werden coniugirte Diameter genannt werden. (Fig. 76). Fig 76

§ 267. Eben so, wenn man aus einem bel. P. N in der Peripherie eines Kr. eine Ord. NQ auf den Durchm. CG und durch die Endp. N, Q dieser Ord. Perpd. NS,

QR auf die gemeinsch. Axe fällt, von welchen der erste die Ellipse in M und der zweite den Diam. CE in P schneidet; und wenn man durch die P. M, P die MP zieht, so wird diese L. eine Ordinate auf den Diam. CE sein. Die Ord. PM, QN, welche sich, wie wir so eben ausgesagt haben, im Kr. und in der Ellipse endigen, werden correspond. Ordinaten genannt werden.

§ 268. Zus. Aus dieser Erkl. folgt, 1) daß alle corresp. Ord. PM, QN die gemeinsch. Axe in einerlei P. O schneiden, denn wegen den Prllen. QR, GK hat man

QR : PR = GK : EK, und wegen der Eigensch. der Ellipse GK : EK = NS : MS;

folgl. hat man QR : PR = NS : MS;

Da nun diese durch Constr. prll. L. auch den durch ihren Endp. gehenden gr. L. PM, QN proportional sind, so werden sie AC in einerlei P. O schneiden (Lehns. § 262).

2) Aus derselben Erkl. folgt noch, daß die Ord. PM der Ellipse prll. mit dem Diam. CF ist: denn da CL || QN, so wie auch LI || NS durch Constr., so ist △CIL ∽ △OSN und geben CI : OS = IL : NS; aber wegen der Eigensch. der Ellipse IL : NS = IF : MS; mithin hat man CI : OS = IF : MS; die rechtw. Tr. CIF, OSM sind also ähnl., und folgl. CF || MP (Fig. 76).

§ 269. V. Lehrs. Das Quadrat PM² einer Ordinate PM auf einem beliebigen Diameter CE der Ellipse verhält sich zu dem Rectangel EP . eP oder CE² — CP² der correspondirenden Abscissen, wie das Quadrat CF² des halben conjugirten Diameters CF zu dem Quadrat CE² des halben Diameters CE, auf welchem die Abscissen genommen werden. (Fig. 76).

Bew. Die aus prll. L. gebildeten Tr. CFL, OMN,

OPQ sind ähnl. und geben $OM : ON = OP : OQ = CF : CL$; daher auch $OM + OP : ON + OQ = CF : CL$, oder reducirt $MP : NQ = CF : CL$; woraus $MP^2 : CF^2 = NQ^2 : CL^2$; aber aus der Natur der Kr.

$$NQ^2 : CL^2 = CG^2 - CQ^2 : CG^2;$$

und wegen der ähnl. Tr. CQP, CGE hat man

$$CG^2 - CQ^2 : CG^2 = CE^2 - CP^2 : CE^2;$$

folglich $$MP^2 : CF^2 = CE^2 - CP^2 : CE^2;$$

oder $$MP^2 : CE^2 - CP^2 = CF^2 : CE^2.$$

§ 270. Zus. 1. Die Eigensch. der Ord. auf dem Diam. sind also genau dieselben, als die der Axen; nennt man also einen bel. Diam. 2a, sein conj. 2b; eine bel. aus den Mittelp. auf einen der conj. Diam. genommenen Absc. x; die corresp. Ord. y, und p der Parm. des Diam., auf welchen man die Absc. nimmt, so wird man immer folgende Analogie haben

$$y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2 = p : a;$$

woraus man die Gleich. der conj. Diam. und des Parm. zieht; die eine $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, die andere $y^2 = ap - \frac{px^2}{a}$, welche auf eine allgem. Art die Natur und die Eigensch. der Ellipse in Bezug auf ihre Axen oder in Bezug auf ihre Diam., ausdrücken, den Ursprung der xen in einem der Endp. eines Diam. angenommen; alsdann ist, wenn man eine der Absc. durch x vorstellt, die andere nothw. $2a - x$, und das Rect. aus den Absc. ist $2ax - x^2$; mithin wird man haben

$$y^2 : 2ax - x^2 = b^2 : a^2 = p : a;$$

woraus man zwei neue Gleich. zieht

$$y^2 = (2ax - x^2) \frac{b^2}{a^2} \text{ und } y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

welche gleichfalls die Natur der Ellipse ausdrückt.

§ 271. Zus. 2. Man kann also eine auf ihre Diam.

bezogene Ellipse betrachten, als sei sie aus eine andere Ellipse gebildet, welche dieselben Diam. zu Axen gehabt hätte, dergestalt, daß eine von ihren Axen und alle Ord, die ihr parll. sind, sich gegen die andere Axe gleich und nach einerlei Seite hin geneigt haben, um die Ellipse zu bilden, von welcher man die conj. Diam. hätte.

§ 272. Zus. 3. Um also in einem P. M einer Ellipse, von welcher man zwei conj. Diam. CE, CF hat, eine Tg. zu ziehen, so darf man nur durch M eine Ord. MP auf einen dieser Diam. ziehen, nachgehends zu CP und CE eine dritte Propt. CT zu suchen und MT ziehen. Denn man kann eine Tang. als eine gr. L. ansehen, die durch die Endp. zweier unendlich nahe liegenden Ord. geht; so lange also die Ord. die nämlichen sind, welches auch immer ihre Neigung auf die Abscissenl. sein mag, so wird die Tang. nach § 263 dieser nämlichen Abscissenl. immer in derselben Entf vom Mittelp. begegnen. Bezeichnen wir also immer die aus dem Mittelp. genommenen Absc. CP mit x, so wird immer die Subtang. $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ sein. Eben so wird der Theil des Diam. zwischen dem Mittelp. und dem Treffpunkt der Tang. sein $\frac{a^2}{x}$. Mit einem Worte, alle L., deren Bestimmung nicht von der Betrachtung der W. abhanget, werden sowohl für den Diam. als für die Axen einerlei Ausdrücke haben. Woraus folgt, daß der Ausdruck von der Norm., der Subnorm., der Tang. nicht für einen Diam. und für die Axen einerlei sein wird, weil man in diesem Falle auf den rechten W. gesehen hat, den die Ord. mit ihren Axen machen.

§ 273. Zus. 4. Wenn die den conj. Diam. CE, CF corresp. Diam. CG, CL mit der gemeinsch. Axe einen W.

von 45° machen, so werden in diesem Falle die Absc. CK, CI, wie auch die conj. Diam. einander gl. Die Gleich. der Ellipse $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ wird alsdann diese $y^2 = a^2 - x^2$, welches dieselbe als für den Kr. ist. Damit also eine Curve ein Kr. sei, ist es nicht hinreichend, daß die Qdr. der Ord. den Prod aus ihren Absc. gl. seien; es müssen überdem noch die Ord. mit ihren Diam. rechte W. machen. Hieraus folgt, daß in einer Ellipse nicht mehr als zwei gl. conj. Diam. sein können, weil es im Kr. nur zwei corresp. Durchm. giebt; welche mit der gemeinsch. Axe einen halben rechten W. bilden. Es ist leicht zu sehen, daß die Absc, welche die halben gl. conj. Diam. gilt, gleich $= CA \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist.

§ 274. VI. **Lehrs.** **Wenn man aus den Endpunkten M, N zweier conjungirter Diameter auf einen andern beliebigen Diameter CA, welcher zwischen den beiden ersten durchgehet, die Ord. PM, QN zieht, so hat man $CA^2 - CP^2 = CQ^2$; oder $CA^2 - CQ^2 = CP^2$.** (Fig. 77).

Bew. Es sei $AC = a$; $BC = b$; $CP = x$; $CQ = z$, und es sei die Tang. TMt bis zu dem conj. Diam. CA, CB gezogen; so muß bew. werden, daß

$$z^2 = a^2 - x^2, \text{ oder } x^2 = a^2 - z^2.$$

Die ähnl. Tr. TPM, CQN geben

$$PT^2 : CQ^2 = MP^2 : NQ^2,$$

und wegen der Eigenschaft der Ellipse hat man

$$MP^2 : NQ^2 = CA^2 - CP^2 : CA^2 - CQ^2.$$

folgl. $PT^2 : CQ^2 = CA^2 - CP^2 : CA^2 - CQ^2$,

und analytisch

$$\frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2} : z^2 = a^2 - x^2 : a^2 - z^2.$$

(§ 272) $CP : CA = CA : CT$

$CT = \frac{a^2}{x}$

und $PT = CT - CP = \frac{a^2}{x} - x = \frac{a^2 - x^2}{x}$

Hieraus

$$a^2 - x^2 : z^2x^2 = 1 : a^2 - z^2;$$

mithin $z^2x^2 = (a^2 - x^2)(a^2 - z^2);$

folgl. $a^2 - x^2 = z^2$, oder $x^2 = a^2 - z^2$.

§ 275. Zus. 1. Wenn man aus den Endp. M, N der nämlichen Diam., auf den den Diam. CA, conj. Diam. CB, Ordin. MR, NS fallen läßt; so sieht man eben so, daß $CS^2 = CB^2 - CR^2$, und daß $CR^2 = CB^2 - CS^2$. Nimmt man also an, daß die halben Diam. CA und CB die Axen der Ellipsen sind, so werden die Tr. CPM, CQN rechtw. sein, und man wird hieraus folgende Gleichheit ableiten

$CM^2 + CN^2 = CA^2 + CB^2$; denn aus der Gleichheit

$CA^2 - CP^2 = CQ^2$, § 274.

zieht man $CA^2 = CP^2 + CQ^2$

und eben so aus der Gleichheit

$$CB^2 - CR^2 = CS^2$$

leitet man ab $CB^2 = CS^2 + CR^2$;

addirt man also die zwei letzten Gleich., so hat man

$$CA^2+CB^2=CP^2+CQ^2+CS^2+CR^2=CP^2+PM^2+CQ^2+QN^2,$$

indem man an die Stelle der Grß. $CR^2$, $CS^2$, ihr gleichen $PM^2$, $QN^2$ setzt, aber wegen den rechtw. Tr. CPM, CQN; $CM^2 = CP^2 + PM^2$ und $CN^2 = CQ^2 + QN^2$; man wird also diese letzte Gleich. haben

$$CA^2 + CB^2 = CM^2 + CN^2;$$

woraus folgt, daß in einer Ellipse die Summe der Qdr. zweier bel. conj. Diam. gl. ist der Summe der Qdr. der Axen.

§ 276. Zus. 2. Jetzt ist es leicht, den analytischen Ausdruck von zwei bel. conj. Diam. zu haben. Denn es ist wegen des rechtw. Tr. CPM sichtbar, daß

$CM^2 = CP^2 + PM^2$, oder

$$CM^2 = x^2 + (a^2 - x^2)\,\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}{a^2}.$$

Wenn man $CM^2$ von $CA^2 + CB^2 = a^2 + b^2$ abnimmt, so hat man

$$CN^2 = \frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{a^2};$$

$$\text{folgl. } CM = \frac{1}{a}\sqrt{(a^4 + a^2x^2 - b^2x^2)},$$

$$\text{und } CN = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2b^2 + b^2x^2 - a^2x^2)}.$$

§ 277. VII. Lehrs. Es seien immer noch CM, CN zwei conjugirte Diameter, und CA, CB zwei andre conj. Diam., davon der eine CA zwischen den beiden ersten durchgehet: zieht man die so weit verlängerte Tangente tMT, bis sie auf beiden Seiten die conjugirten Diameter CA, CB trifft, so hat man $MT \,.\, Mt = CN^2$. (Fig. 77).

Bew. In dem letzten Lehrsatz haben wir gefunden $CQ^2 = a^2 - x^2$; man hat aber auch $CP \,.\, PT = a^2 - x^2$, denn (§ 250) $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ u. $CP = x$. Folglich $CQ^2 = CP \,.\, PT$. Ueberdem hat man wegen der ähnl. Tr. CQN, TPM, MRt diese zwei Propt. $MT : TP = CN : CQ$ und $Mt : MR$ oder $CP = CN : CQ$; diese Propt. zusammengesetzt geben

$$MT \,.\, Mt : PT \,.\, CP = CN^2 : CQ^2;$$

wir haben aber eben gesehen, daß

$$PT \,.\, CP = CQ^2;$$

$$\text{folglich } MT \,.\, Mt = CN^2.$$

§ 278. VI. Aufg. Wenn man zwei der Größe und Lage nach gegebene conjugirte Diameter CM, CN kennt,

zwei ebenfalls conjugirte Diameter zu finden, die mit einander einen gegebenen Winkel bilden. (Fig. 77 und 78).

Aufl. Man nehme an, die Aufg. sei gelößt, und daß CA und CB (Fig. 78) die verl. Diam. sind: durch M sei die Tang. TMt gezogen, die der Lage nach gegeben ist, weil sie prll. mit CN ist, deren Lage als bestimmt angenommen ist. Es sei überdem der Durchm. CM bis F verl., so daß CM : CN = CN : MF; so ist einleuchtend, daß $CN^2 = CM . MF$. Nach dem letzten Lehrs. hat man aber auch $MT . Mt = CN^2$; mithin $MT . Mt = CM . MF$; die vier P. C, F, T, t müssen also in der Peripherie eines Kr. liegen; dieses bringt unsere Aufg. auf folgende zurück.

§ 279. Aufg. Wenn eine gerade Linie CF und ihre Theile CM, MF der Größe und Lage nach gegeben ist, und eine andere unbegrenzte Linie tMT nur in Betreff der ersten der Lage nach gegeben ist; den Mittelp. G eines Kreises zu finden, der durch die gegebenen Punkte C, F geht, und die Linie Tt in zwei Punkte T, t so schneidet, daß der Winkel TCt einem gegebenen Winkel qrs gleich sei. Die Constr. ist folgende.

In der Mitte D von CF errichte man den Perpd. DL, der MT in L trift, und ziehe LF. Durch denselben P. D zieht man DE auf MT perpd. und DI gegen DE unter einem W. EDI gl. dem gegebenen, und beschr. mit dem Halbm. DI einen Kr., der LF in K schneidet, nach welchem man DK zieht; endlich zieht man durch F die FG || DK, und der P. G, wo diese L., so weit als nöthig verl., LD trift, wird der Mittelp. des gesuchten Kr. sein. Um nachgehends die P. T, t, wo die verlangten Diam. die Tang. MT schneiden, zu haben, so darf man nur aus G mit dem Halbm. GF oder mit Gt || DI einen Kr. zu beschr.

Bew.

Bew. Es ist einleuchtend, daß die L. GF, GT, Gt gl. sind; denn man hat durch Constr. GF || DK und Gt || DI gemacht; mithin geben die ähnl. Tr. LDK, LGF; LDI, LGt

$$DK : GF = LD : LG = DI : Gt;$$

da nun nach der Constr. DK = DI; so ist auch GF = Gt. Ueberdem ist ∠TCt gl. dem gegebenen. Um sich davon zu überzeugen, so ziehe man nur GH perpd. auf Tt; da dieser Perpd. durch den Mittelp. geht, so halbirt er den W. TGt und ist auch prll. mit DE, die auch auf Tt perpd. angenommen wird. Aber wegen der Prllen. DI, Gt sind die W. tGH, IDE einander und dem gegebenen W. gl., weil der letztere W. IDE so constr. worden; daher wird auch W. TCt dem gegebenen W. gl. sein, weil dieser W. seinen Scheitel in der Peripherie hat, und da er auf dem Bog. TFt stehet, so hat er die Hälfte dieses Bogens zum Maaße, welches genau die des Mittelpw. tGH ist.

§ 280. Anmerk. Wollte man auf den L. Ct, CT die Länge der halben conj. Diam. CA und CB bestimmen, so ziehe man nur durch M eine Ord. MP, oder, welches einerlei, eine Prlle. Ct, und nehme nachgehends CA als mittlere geom. Proportionale zwischen CP und CT. Eben so findet man auch die Länge von CB (Fig. 77). Verlangte man die Axen der Ellipse selbst, so ist einleuchtend, daß der Mittelp. G mit dem P. L zusammenfällt (Fig. 78); und folgl. ist der P. L der Mittelp. des Kr.; die Aufl. dieses Falles wird also ein Corollarium von unserer allgem. Aufl. Denn da der ∠EDI immer gl. dem gegebenen W., der conj. Diam. sein soll, so wird dieser W. ein rechter, für die Axen; alsdann ist DI || Et, und der Halbm. DI unendlich, welches auch DK || LK macht; da sich nun der Mittelp. G bestimmt, indem man durch F die FG || DK zieht, so leuchtet ein, daß man in dem gegenw. Falle durch F eine Prlle. mit KL ziehen muß, die keine andere als FL sein kann, und folgl. ist L der

verl. Mittelp., welches man auch gl. bei Ansicht der Fig. sieht. Die Constr. dieses letztern Falles ist genau dieselbe, die Apollonius gegeben hat.

§ 281 VII. Aufg. Es sei Mt eine Tangente durch den Berührungspunkt M und parallel mit dem Diameter CN, conjugirt zu dem durch den Berührungspunkt M gehenden Diameter. Man soll den analytischen Ausdruck von einem aus dem Mittelpunkt C auf die Tangente MT gefällten Perpendikel finden. (Fig. 77).

Aufl. Die ähnl. Tr. MPT, CKT geben

$$MT : MP = CT : CK;$$

wir haben aber (§ 253) gefunden

$$MT = \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}{x^2}\right)},$$

und $CT = \frac{a^2}{x}$ (§ 252); $MP = b\sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)}$;

folgl. $CK = \frac{a^2b}{\sqrt{(b^2x^2 - a^2x^2 + a^4)}}$.

§ 282. VIII. Lehrs. Alle um einerlei Ellipse aus zwei conjugirten Diametern beschriebene Parallelogramme sind unter sich und dem Rectangel aus den Axen gleich. (Fig. 77).

Bew. Es ist sichtbar, daß der Inhalt des aus zwei halben conjugirten Diam. CM, CM gebildeten Prllgrm. gl. dem Rect. aus CN und CK ist, man hat aber vorher (§ 276) gefunden $CN = \frac{\sqrt{(b^2x^2 - a^2x^2 + a^4)}}{a}$ und in der letzten Aufg. hatten wir so eben

$$CK = \frac{a^2b}{\sqrt{(b^2x^2 - a^2x^2 + a^4)}}; \text{ folgl. } CN \,.\, CK = ab;$$

oder $CN \,.\, CK = CA \,.\, CB$.

§ 283. IX. Lehrs. Der Flächeninhalt der Ellipse verhält sich zu dem Inhalte eines über der großen oder über der kleinen Axe beschriebenen Kreises, wie die kleine Axe zur großen oder wie die große zur kleinen Axe. (Fig. 75).

Bew. Man betrachte die Ellipse aMBA und den Kr. aNDA, als seien beide durch eine unendl. Anzahl mit einander prll. und perpd. auf ihrer gemeinsch. Axe stehender Ord. gebildet. Die Anzahl der Elemente wird beiderseits gl. sein, weil diese Anzahl durch einerlei gemeinsch. Axe gemessen wird, und überdem jedes Element PM der Ellipse sich zu ihrem corresp. PN im Kr. verh., wie CB zu CA; also verh. sich die Summe der Elem. einerseits oder die Fläche der Ellipse zu der Summe der Elem. andererseits oder zu der Kreisfl. wie CB zu CA. Eben so zeigt man, daß die Ellipsenfl. sich zur Krfl. über der kl. Axe verh. wie die grß. Axe zur kl. Axe.

§ 284. Zus. 1. Hieraus folgt, daß die Fl. der Ellipse gl. dem Inhalt eines Kreises ist, dessen Halbm. die mittlere geom. Propt zwischen den beiden halben Axen. Es sei F die Fläche des über CA beschr. Kreises; f die Fl. der Ellipse und CL der mittlere Halbm. zwischen CA und CB. Wir haben so eben gesehen, daß F : f = CA : CB, und weil CA : CL = CL : CB, so hat man $CA : CB = CA^2 : CL^2$, oder, wenn man die über dieser L. beschr. Kr. nimmt und sie durch Kr. CA und Kr. CL bezeichnet,

$$CA^2 : CL^2 = \text{Kr. } CA : \text{Kr. } CL;$$

mithin F : f = Kr. CA : Kr. CL.

Aber F = Kr. CA (Hypothese), folgl. auch f = Kr. CL.

§ 285. Zus. 2. Die Fl. der Ellipse ist also beinahe gl. $\frac{22}{7}$ von dem Rect. aus ihren halben Axen oder von dem aus ihren beiden halben conj. Diameter gebildeten Prllgrm.

Denn man weiß, daß der Inhalt eines Kr. gl. $\frac{22}{7}$ vom Qdr. des Halbm. Man hat also $F = \frac{22}{7} . CA^2$. Da nun $F : f = CA : CB$, so ist auch $\frac{22}{7} CA^2 : f = CA : CB$, also $f = \frac{22}{7} . CA . CB$, genauer $f = \frac{355}{113} . CA . CB$; oder wenn $\pi$ die halbe Peripherie für den Halbm. 1 bezeichnet, so ist $f = \pi . CA . CB$.

§ 286. Anmerk. Auch hier sei es uns wie bei der Parb. erlaubt, die Eigenschaften der Ellipse zum Besten der Anfänger wenigstens für die Axen aus einer andern Erkl. abzuleiten.

§ 287. Die Ellipse ist eine kr. L., für welche bei rechtw. Coord. $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$, d. h. in welcher das Qdr. einer Ord. dem Prod. des Parm. in ihre Absc. weniger dem Prod. aus dem Qdr. dieser Absc. in den durch die halbe grß. Axe dividirten halben Parm. gl. ist; wo p den halben Parm., und a die halbe grß. ausdrückt. Es kommt also in der Ellp. außer dem Parm. noch eine unveränderl. Grß., die grß. Axe, vor, denn diese ist, wie man bald sehen wird, in der Ellp. und Hyperb. begrenzt, da sie hingegen in der Parb. unbegrenzt oder unendlich war (§ 214).

§ 288. Aus obiger Gleich. folgt

$$ay^2 = p(2a - x)x,$$

und hieraus die Propt. $y^2 : (2a - x)x = 2p : 2a$. Es verh. sich also in der Ellipse das Qdr. einer Ord. zu dem Rect. aus den von der Ordin. abgeschn. Segm. der grß. Axen, wie der Parm. zur grß. Axe. Auch ist

die grß. Axe $2a = \frac{2px^2}{2px - y^2} = \frac{2px}{2p - \frac{y^2}{x}}$.

Der Parm. $2p = \frac{2ay^2}{(2a-x)x} = \frac{2ay}{x} \cdot \frac{y}{2a-x}$. Hieraus

Der Werth der Absc. $x = a \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{y^2}{2p}\right)2a}$.

Der Werth der Ord. $y = \pm \sqrt{\left[\frac{px}{a}(2a-x)\right]}$

oder $\pm \sqrt{\left[\left(2p - \frac{px}{a}\right)x\right]}$,

und man kann also auch hier aus diesen vier Dingen zu jeden gegebenen dreien sehr leicht das vierte finden.

§ 289. Setzt man in $y^2 = \frac{p}{a}x(2a-x)$ die Ord. $y = 0$, so ist $\frac{px}{a}(2a-x) = 0$ und also entweder $\frac{px}{a} = 0$ oder $2a - x = 0$, d. i. erstens $x = 0$ und zweitens $x = 2a$. Wenn man also den Anfang der Absc. in A, d. i. in den Anfg. der grß. Axe setzt, so wird die Ord. der Ellp. im Anfg. und Ende der grß. Axe Null, d. i. in A und B, wenn $AB = 2a$. (Fig. 79).

§ 290. Weil $y = \pm \sqrt{\left[\frac{px}{a}(2a-x)\right]}$, so gehören zu jeder Absc. zwei entgegengesetzte, aber der Grß. nach gl. Ord., über und unter der Axe, daß also die Ellp. von ihrer Axe in gl. und ähnl. Hälften AMDNB, AmdnB getheilt wird, wie die Parb. (§ 210).

§ 291. Wenn x pos. und $< 2a$, so ist der Fact. $2a - x$ allemal pos., und das Prod. aus ihm in den andern pos. Fact. $\frac{px}{a}$ auch pos., und der Werth der Ordin. beständig möglich. Für $x = 0$ oder $x = 2a$ wäre die Ord. beidemal Null, und die kr. L. hätte die P. A und B mit der

Abscissenaxe gemein, wie § 289. Nähme man $x > 2a$, so würde der Fact. $2a - x$ neg., und eben so, weil $\frac{px}{a}$ pos., das Prod. $\frac{px}{a}(2a - x)$ unter dem Wurzelzeich. neg. Eben dieses würde erfolgen, wenn man x verneint nähme; denn hier verwandelt sich $2a - (-x)$ in den pos. Fact. $2a + x$, aber der andere Fact. wäre neg. und also auch beider Prod. unter dem Wurzelzeichen. In beiden Fällen sind aber die Ord. unmöglich und liegen also alle mögliche Ord. innerhalb A und B; oder die Ellipse schlingt sich um ihre Axe zu beiden Seiten derselben und begrenzt hierdurch die Axe, die in der Parb. unendlich war.

§ 292. Punkte in der Ellipse auf ähnl. Art, wie bei der Parabel (§ 209), zu finden, wähle man den Ausdruck $y = \pm \sqrt{\left(2p - \frac{px}{a}\right)x}$ (§ 288) und setze (Fig. 80) durch den P. A, als den Anfgsp. in der Abscissenaxe AQ, die Ordinatenaxe GH rechtw. und nehme auf ihr $AD = 2a$, so wie auf der andern $AE = 2p$ und ziehe ED. Nun nehme man willkührliche Absc. AP und mache $OD = AP$, so bestimmt eine Prlle. aus O mit ED den P. S auf EA und es ist, weil $AD : AE = OD : ES$ oder $a : p = x : ES$, alsdann $ES = \frac{px}{a}$ und also durchgängig $SA = EA - ES = 2p - \frac{px}{a}$. Zeichnet man nun über SP, zwischen den zugehörigen P. S, P einen Halbkr. SHP, so schneidet derselbe auf AG eine mittlere Prop. $AH = \sqrt{\left(2p - \frac{px}{a}\right)x}$ ab, der man durch die Prlle. HM mit der Axe AQ die corresp. Ord. PM zu der willk. angen. Absc. AP gl. macht.

Für die neg. Ord. nehme man durchgängig Pm = PM, so ist dem Ausdrucke $y = \pm \sqrt{\left(2p - \frac{px}{a}\right)x}$ vollkommen Genüge geschehen.

§ 293. Man braucht hier die Absc. nicht über a zu nehmen. Denn für Absc., d. i. für solche Theile der Axe, deren Theilungsp. von den Endp. A, B der Axe gl. weit entfernt sind, für $x = \frac{1}{n} \cdot 2a$ u. $x = \frac{n-1}{n} \cdot 2a$; giebt es gl. grß. Ord., wie bei dem Kr. (§ 150), denn wenn man diese Werthe in die Gleich. anstatt x subst., so kömmt in beiden Fällen $y = \pm \frac{2}{n} \sqrt{[(n-1)ap]}$; woraus zugleich erhellet, warum § 288 für einerlei y die Absc. x einen doppelten Werth hat; folgl. schneidet die verl. ΠM diese Ord. für die andre Absc. über Q von selbst ab.

§ 294. Für x = a verwandelt sich der Ausdruck $y = \sqrt{\left(2p - \frac{px}{a}\right)x}$ in $y = \sqrt{ap} = CD$ (Fig. 79) u. ist also 2CD = Dd. Diese L. wird die kleine oder die conjugirte Axe zu der grß., so wie der P. C, der Mittelp. der Ellipse genannt.

§ 295. Man setze AC (Fig. 79) oder die halbe kl. Axe $\sqrt{ap} = b$, so ist:

die kl. Axe $2b = \sqrt{(2a \cdot 2p)}$: die mittl. Propt. zwischen dem Parm. und der grß. Axe.

Die grß. Axe $2a = \frac{4b^2}{2p}$; die dritte Propt. zu dem Parm. und der kl. Axe.

Der Parm. $2p = \frac{4b^2}{2a}$: die dritte Propt. zu der großen und kleinen Axe.

§ 296. Substituirt man nun in die Gleich. aus dem Parm. und der grß. Axe $y^2 = 2p\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)$ anstatt 2a oder 2p die gefundenen Werthe dieser Grß., so kommt im ersten Falle $y^2 = 2px - \frac{p^2x^2}{b^2} = \frac{px}{b}\left(2b - \frac{px}{b}\right)$, eine Gleich. aus dem Parm. und der kleinen Axe, und im andern Falle $y^2 = \frac{4b^2}{2a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} =$

$$\frac{bx}{x}\left(2b - \frac{bx}{a}\right)$$

eine Gleich. der Ellp. aus den beiden Axen.

§ 297. Wenn man der Absc. Anfg. in C setzt, und aus der gegebenen Gleich. für die Coord. x, y oder AP, PM eine andere für CP, PM sucht: so ist PM oder y in beiden einerlei, aber AP ist hier AC — CP oder $x = a - u$, wenn man die neue Absc. $CP = u$ setzt. Man subst. also in eine der vorigen Gleich. $a - u$ anstatt x, so bekommt man $y^2 = ap - \frac{pu^2}{a}$ oder $y^2 = b^2 - \frac{b^2u^2}{a^2}$; beides Gleich. der Ellipse, wo die Absc. von dem Mittelp. gerechnet sind.

§ 298. Da $y^2 = b^2 - \frac{b^2u^2}{a^2} = \frac{4b^2}{2a}\frac{(a+u)}{}\frac{(a-u)}{2a}$ ist $y = 0$ für $u = \pm a$, weil alsdann einer von den beiden Fakt. Null wird, und schneidet also die Ellipse zweimal die Axe, einmal in A und hernach in B. Für $u > \pm a$ wird einer von diesen Fact. und also das ganze Prod. neg. und die Ord. unmöglich: daß also die ganze Ellp. in der Fig. AMDBdmA eingetheilt ist, bleibt wie § 291.

§ 299. Weil die Absc. u hier quadratisch ist, so geben entgegengesetzte aber gl. Absc. gl. Ord. y. Hätte man § 297 nicht auf CP sondern auf CQ gerechnet, so hätte

man $a + u$ anstatt $x$ subst. müssen; wo man aber dennoch eben die Gleich.

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$$

bekommen hätte. Für $CQ = CP$ ist also auch $QN = PM$ und $Qn = Pm$, oder die kl. Axe $Dd$ theilt die Ellp. auch in gl. und ähnl. Hälften $DMAmd$, $DNBnd$, wie die gr. Axe (§ 290), und sind also die vier Quadranten $DMA$, $Amd$, $dnB$, $BND$ einander gl. und ähnl.

§ 300. In der Gleich. $y^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$ wurden die Absc. auf der grß. Axe genommen. Man verwechsele itzt die Coord. mit einander, so daß $u$ nun die Ord. und $y$ die Absc. bedeute, so ist $u^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 = \frac{4a^2}{2b} \frac{(b+y)(b-y)}{2b}$. Wie in jener Gleich. $u$ nicht grß. als $\pm a$ genommen werden kann (§ 298), so darf hier $y$ nicht grß. als $\pm b$ sein. Also liegt offenbar in der letzten Gleich. die Absc. $y$ in der kl. Axe, wenn $2a$ die grß. Axe bedeutet. Eine Prlle. $ME$ mit $AB$ macht näml. $PC = ME = u$, $PM = CE = y$, daß also die Gleich. zwischen den Coord. $CE$ und $EM$ auf der kl. Axe nothwendig eben die Gestalt haben muß, als die zwischen $CP$ und $PM$ auf der grß. Axe.

Hier ist also

$$u = \pm \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2}\right)} = \pm a \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Man setze $a = mc$, so ist

$$u = \pm mb \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = \pm m \sqrt{(b^2 - y^2)}.$$

Setzt man $b = 1$, so ist $u = \pm m \sqrt{(1 - y^2)}$, wo $u$ Ord. mit der grß. Axe prll. (wie hier $EM$) und $y$ Absc. auf der kleinen Axe (wie $CE$) bedeuten kann.

§ 301. Sind aber beide Axen eiuander gl. oder $a = b$, so wird $y^2 = b^2 - u^2 = a^2 - u^2$ und eben so $u^2 = a^2 - y^2 = b^2 - y^2$, d. i. die Ellipse wird ein Kr. von dem Halbm. $a = b = p$.

§ 302. Jede Ord. y ist also kleiner als CD, wenn sie nicht selbst CD, und jede Absc. u ist kl. als AC, wenn sie nicht selbst AC ist, und sie also beide kl. als die halben Axen; auch nehmen die Ord. immer mehr und mehr ab, je weiter sie sich von dem Mittelp. entfernen, da im Gegentheile die Absc. wachsen.

§ 303. Wenn PM, QN zwei unbestimmte Ordin. auf der grß. Axe sind, so ist alsdann (§ 287),

$$2p\left(AP - \frac{AP^2}{2a}\right) = PM^2,$$

und eben so $2p\left(AQ - \frac{AQ^2}{2a}\right) = QN^2$ und ist also

$$\left(AP - \frac{AP^2}{2a}\right) : \left(AQ - \frac{AQ_2}{2a}\right) = PM^2 : QN^2 \text{ oder}$$

$AP(2a - AP) : AQ(2a - AQ) = PM^2 : QN^2$,

d. h. $AP \, . \, PB : AQ \, . \, QB = PM^2 : QN^2$,

d. h. die Qdr. der Ord. verh. sich in der Ellp., wie die Rect. unter den corresp. Segm. der gr. Axe.

§ 304. Den Brennp. F (§ 222) in der Ellp. zu finden, setze man, CF sei die Abs. a. d. Mittelp. zu der Ord. FG, die dem halb. Parm. gl. ist, so ist, weil $p = \frac{b^2}{a}$ (§ 295), $b^2 - \frac{b^2 . FC^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}$,

oder $\frac{b^2}{a^2} FC^2 = b^2 - \frac{b^4}{a^2}$, also $FC^2 = a^2 - b^2$.

Und $FC = \pm \sqrt{(a^2 - b^2)} = \pm \sqrt{(a + b)(a - b)}$ oder $\pm \sqrt{(a^2 - ap)}$.

Das doppelte Zeichen zeigt an, daß zwei Brennp. F und f

in der Ellp. in gl. Entf. auf entgegengesetzten Seiten des Mittelp. C in der grß. Axe befindlich sind.

§ 305. Weil AC = a, so ist die Weite der Brennp. vom Scheitelp. A = $a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$ oder $a \pm \sqrt{a(a-p)}$, das untere Zeichen für AF, das obere für Af. Für den Kr., wo a = b = p (§ 301) wird, die Wurzelgrß. Null und die Weite vom Scheitel beider Brennp. = a, d. i. sie fallen beide in den Mittelp. des Kr.

§ 306. Weil CD = b, so ist $FD^2$ oder $fD^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2} + b^2 = a^2$ und also FD = a = fD. Wenn also beide Axen gegeben sind, so lasse man sie einander in ihrem Mittelp. rechtw. durchkreuzen und schneide mit der Zwischenweite a aus dem einen Endp. der kl. Axe die grß. Axe zu beiden Seiten, so ergeben sich hierdurch die beiden Brennp. F, f.

§ 307. Man setze der Absc. Anfg. aus C in f und nenne fP = w, so ist $w = u + \sqrt{(a^2 - b^2)}$ und $u = w - \sqrt{(a^2 - b^2)}$, also $u^2 = w^2 + a^2 - b^2 - 2w\sqrt{(a^2 - b^2)}$. Dieser Werth, anstatt $u^2$ in die Gleich. (§ 297) subst., giebt

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\left[w^2 + a^2 - b^2 - 2w\sqrt{(a^2 - b^2)}\right]$$

$$= \frac{b^4}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}w^2 + \frac{2b^2w}{a^2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$$

oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[b^2 - w^2 + 2w\sqrt{(a^2 - b^2)}\right]$.

Für eine Absciße wie fQ = Cf − CQ, d. i. für $w = \sqrt{(a^2 - b^2)} - u$ wäre $u = \sqrt{(a^2 - b^2)} - w$, aber nichts destoweniger die Gleich. eben dieselbe.

Für w = o wäre $y^2 = \frac{b^2}{a^2}$ oder die Ordinate

$$y = \pm \frac{b^2}{a} = p \ (\S\ 295)$$

dem halben Parm. gl., nach § 222.

§ 308. Diese Gleich. ist offenbar nicht so einfach als die, wo die Absc. von dem Mittelp. gerechnet wurden, weil da zu gl. entgeg. Absc. gl. grß. Ord. gehören, welches hier nicht Statt findet. Will man nämlich das Gesuchte, wie hier die Gleich., auf die einfachste Art ausdrücken, so muß man es durch solche Dinge thun, die, so viel möglich, einerlei Verhalten unter sich und zu den gegebenen haben.

§ 309. Wenn man aus einem bel. P. M in der Ellp., die L. MF, Mf in die Brennp. zieht, so bestimmt die Ord. MP zwei rechtw. Tr. FMP, fMP auf der Axe, vermittelst welcher man die Länge dieser Linie und also auch ihre Summe auszudrücken im Stande ist. Es ist aber, wenn man Cf oder $\sqrt{(a^2 - b^2)} = e$ setzt,

$$FM^2 = FP + PM^2 = (e - u)^2 + y^2,$$
$$= e^2 - 2eu + u^2 + y^2,$$
$$= a^2 - b^2 - 2eu + b^2 - \frac{b^2u^2}{a^2},$$
$$= a^2 - 2eu + \frac{a^2 - b^2}{a^2} u^2,$$
$$= a^2 - 2eu + \frac{e^2 . u^2}{a^2},$$
$$= \left(a - \frac{eu}{a}\right)^2;$$

$$\text{folglich } FM = \pm a \mp \frac{eu}{a}.$$

Eben so ist

$$fM^2 = fP^2 + PM^2 = (e + u)^2 + y^2,$$
$$= e^2 + 2eu + u^2 + y^2,$$

$$= a^2 + 2eu + \frac{e^2u^2}{a^2},$$

$$= \left(a + \frac{eu}{a}\right)^2;$$

folglich $fM = \pm a \pm \frac{au}{a}$,

demnach $FM + fM = \pm a$, wo man hier in der Summe so wie in den vorhergehenden einzelnen Ausdr. beider L. nur die obern Zeichen braucht, für welche die Wurzeln des Qdrs. allemal pos. sind, weil u niemals grß. als a werden kann; denn man sieht hier nicht auf die Lage sondern auf die absolute Grösse dieser L., und ist also die Summe zweier L. aus den beiden Brennp. an einem P. in der Ellp. jederzeit der gr. Axe gleich.

§ 310. Nähme man den P. M in der Periph. so weit nach A zu, daß MP die Axe in einem P. schnitte, der zwischen A und F läge, so änderte sich der Ausdruck für $fM^2$ nicht, aber $FM^2$ würde $= (u - e)^2 + y^2$. Nähme man hingegen M so weit nach B zu, daß der P. P von MP zwischen f und B fiele: so wäre

$FM^2 = (e + u)^2 + y^2$ und $fM^2 = (u - e)^2 + y^2$, nichts destoweniger in beiden Fällen auch $FM + fM = a$, wie § 309.

§ 311. Hieraus fließt eine sehr bequeme Methode, eine Ellp. aus den beiden Brennp. zu verzeichnen. Man beschr. nämlich mit einem willk. Stücke z der grß. Axe aus F einen Kr. und einen andern aus f mit der Zwischenweite a — z. Beide Kr. schneiden einander über und unter der grß. Axe in zweien P. der Ellp., für welche man, wenn man z ändert, auf die Art noch mehrere P. finden kann. Befestigte man einen Faden in F und f, so würde ein beweglicher Stift, der ihn im Herumdrehen beständig nach

der Lage FMf gespannt hielt, mit stetiger Bewegung eine Ellipse beschr., deren grß. Axe a der Fadenlänge zwischen F und f gl. ist.

§ 312. Die Distanz der Brennp. F, f vom Mittelp. C nimmt ab, je mehr sich die kl. Axe der grß., der Grß. nach, nähert, und wird hierdurch $fM - FM = \frac{2eu}{a} = \frac{2u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$ immer kl, indem sich die Ellp. einem Kr. nähert, dessen Halbm. $= a = \frac{1}{2}(FM + fM)$ und der Mittelp. C ist. Für $a = b$ d. i. hier für $e = o$ fallen F u. f in C, und wird die Ellp. völlig in diesen Kr. verwandelt.

## Vergleichung der Ellipse mit der Parabel.

§ 313. Wenn man eine Ellp. und Parb., die beide einen Scheitel A (Fig. 81) und einen Parm. 2p haben, mit einander vergleicht: so findet man, daß der elliptische Bog. sich dem parb. immer mehr und mehr nähert, je grß. man die Axe 2a in der Ellipse annimmt. Wenn die Bog. AM, AN in der Ellp. und Parb. beide der gemeinsch. Absc. x zugehören: so sind PM, PN die zugehörigen Ord. y, z, und ist in der Parb. $z^2 = 2px$ und in der Ellipse $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$; folgl. $z^2 - y^2 = \frac{px^2}{a}$, welcher Unterschied der Qdr. der beiderseitigen Ord., wenn alles übrige ungeändert bleibt, desto kl. wird, je grß. man a annimmt.

Man zerfälle $z^2 - y^2$ in die Fact. $(z + y)(z - y)$, so ist alsdann $z - y = \frac{px^2}{a(z + y)}$; da

$$z + y > 2y \text{ und also auch } z + y > 2\sqrt{\left(2px - \frac{px^2}{a}\right)},$$

so ist $$z - y < \frac{px^2}{2a\sqrt{\left[2px\left(1 - \frac{x}{2a}\right)\right]}}.$$

$$z - y < \frac{x\sqrt{(px)}}{2\sqrt{[a(2a - x)]}}.$$

Der Divisor $2\sqrt{[a(2a - x)]}$ wächst hier so, wie a gr. wird, denn x wird nicht verändert; folglich wird sein Quotient immer kl.; noch kl. aber die mit ihm verglichene Differenz der Ord., $z - y$, die endlich unter alle Grenzen abnehmen muß, wenn 2a über alle Grenzen gewachsen ist.

§ 314. Diese Differenz kann aber doch niemals ganz verschwinden, so lange der Bog. AM, und die zwischen ihm und den parb. Bog. AN fallenden, zu einem größern 2a gehörigen Bg.; noch elliptische Bog. sein sollen. Man kann also sagen: daß der ellipt. Bg., unter den, § 313, gesetzten Bedingungen, sich dem parb. Bog. ohne Ende nähert, und also niemals völlig mit ihm einerlei wird. Für $2a = \infty$ wäre $\frac{px}{a} = 0$ und also auch $z^2 - y^2$ oder $z - y = 0$, und folgl. beide Bg. einerlei, wenn man die Parb. als eine Ellipse von einer unendlichen Axe ansieht. Das ist aber doch nur ein uneigentlicher Ausdruck, weil die Axe einer würklichen Ellipse niemals unendlich sein kann, § 291.

§ 315. Unterdessen hat diese Betrachtung ihren Nutzen in der Astron., wo gelehrt wird, daß man das Stück einer Cometenbahn, in welchen wir den Cometen sehen, ohne Irrthum für einen parb. Bog. annehmen, und die Rechnung mit Vortheil darauf einrichten kann; weil bei sehr excentrischen Ellp., dergleichen die Laufbahnen der Cometen sind, der elliptische Bg. von den parb. nur um ein sehr Geringes abweicht, so, daß der Untersch von beiden, besonders gegen den Scheitel zu, wenn sich der Comet der Sonne nähert, für nichts zu achten; zumal da offenbar, für

kl. Absc., wie AO, der Unterschied $z - x$ beider Ord. zu den corresp. Bog. AL, AK, allemal kl. sein muß, als bei größeren oder Absc., wie AP. Denn weil $z - y$ mit $x$ wächst oder abnimmt, wenn $2a$ und $2b$ unveränderlich bleiben: so ist nothwendig auch $NM > LK$.

## Von der Aehnlichkeit der Ellipsen.

§ 316. Wenn einer Ellp. grß. und kl. Axe und Parm. $2a$, $2b$, $2p$ und einer andern $2\alpha$, $2\beta$, $2\pi$ sind, so sind beide Ellp. einander ähnlich, wenn sich zwei von diesen L. in der einen, eben so wie die gleichnamigen L. in der andern verh.; wenn $a : b = \alpha : \beta$ oder $a : \alpha = b : \beta$. Oder, die Verh. zweier L. der Verh. ihrer Werthe gleich gesetzt, wenn $p : \pi = \frac{2b^2}{a} : \frac{2\beta^2}{\alpha}$ (§ 295) $= \frac{2b^2}{a} : \frac{2\alpha b^2}{a^2}$, indem man nämlich aus den erster Propt. den Werth von $\beta = \frac{\alpha b}{a}$, in das Glied $\frac{2\beta^2}{\alpha}$ substituirt. Wenn also

$$p : \pi = \frac{2b^2}{a} : \frac{2\alpha b^2}{a^2},$$

so ist auch $p : \pi = a : \alpha = b : \beta$.

§ 317. Absc. und Ord. der zweiten Ellp. sollen itzt $t$ und $z$ heißen, so ist (§ 287)

$$z^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} . t^2.$$

Nun sind auch $a : \alpha = u : t$, so ist $t = \frac{\alpha u}{a}$, und also

$$z^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} : \frac{\alpha^2 u^2}{a^2} = \frac{\alpha^2 b_2}{a^2}\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)$$

oder weil dieser letzte Fact. $= \frac{y^2}{b^2}$ (§ 297)

$$z^2 = \frac{\alpha^2 b^2}{a^2} : \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2 y^2}{a^2} \text{ und } z = \frac{\alpha y}{a},$$

d. i.

d. i. $a : \alpha = y : z$ oder: für Absc., die sich in ähnl. Ellp. wie ihre Axen verh., verh. sich die Ord. eben so.

§ 318. Aus $a : \alpha = u : t$ und $a : \alpha = y : z$ folgt $u : t = y : z$. Eben diese Verh. würde man bekommen haben, wenn man anstatt $a : \alpha$ eine andere $b : \beta$ oder $\pi : p$ gewählt hätte. Also sind für Absc., die sich in ähnl. Ellipsen wie ein Paar zusammengehörige L. (wie die Parm., die grß. oder kl. Axen) verh., auch die Ord. prop. oder in der Verh. dieser Absc.; und da man überh. ähnl. kr. L. als ähnl. Vielecke von unzählig vielen Seiten ansehen kann (§ 246), so folgt auch, daß ähnl. Ellp. durch nichts als nur durch die Grß. von einander unterschieden sind, und daß alle L., die in ihnen auf ähnl. Art bestimmt werden, so wie alle beständige L. einander propt. sein, und beide Flächen oder auch ähnl. Stücke von beiden sich wie die Qdr. ähnlichlieg. L. oder ähnl. Bg. verh. müssen.

§ 349. Hierinn liegt der allgem. Begriff der Aehnlichkeit kr. L., und kann man den Leibnitzischen oder Wolfischen Satz der Aehnlichkeit hier mit Vortheil gebrauchen, nach welchem alle Figuren, ebene und körperliche, die aus ähnl. Dingen auf einerlei Art zusammengesetzt oder erzeugt werden, einander ähnl. sind, wenn die Dinge von der Beschaffenheit sind, daß sie die Fig. ganz bestimmen, wie die zusammengehörigen Axen in den beiden Ell. (§ 316, 317). Hieraus folgt, daß auch alle Parb. einander ähnl. sein müssen, weil sie alle aus ihren Parm., als gerade, einander ähnl. L., bestimmt (§ 207) und alle auf einerlei Art erzeugt werden. Denn wenn für zwei Parb. $y^2 = px$, $z^2 = \pi u$, und man nimmt $p : \pi = x : u$ oder $u = \frac{\pi x}{p}$, so ist $z^2 = \frac{\pi^2 x}{p}$ oder, da $x = \frac{y^2}{p^2}$ auch $z^2 = \frac{\pi^2 y^2}{p^2}$, und

$z = \frac{\pi y}{p}$ oder $p : \pi = y : z$ und also auch $x : u = y : z$ wie § 317, 318. Dieses gilt überhaupt von allen L., deren Gleichungen nur eine beständige Grß. enthalten; so wie nach geom. Gründen alle Fig. ähnl. sind, die zu ihrer Bestimmung nur eine einzige L. nöthig haben, wie das Qdr., der Kr., der Würfel, die Kugel, der gr. Cylinder um die Kugel u. s. w.

---

## Siebentes Kapitel.

### Von den Eigenschaften der Hyperbel, in einer Ebene betrachtet.

---

§ 320. Erklr. Eine gr. L. Aa sei in C halbirt, u. F, f zwei P. auf dieser auf beiden Seiten verl. L., die von C gleich weit entfernt sind; sucht man eine unzählige Anzahl von P. wie M, so daß die Differenz der Linien fM, FM, von jedem dieser P. nach f, F gezogen, beständig gl. der L. Aa sei; so wird die durch diese P. gehende Curve eine Hyperbel sein. (Fig. 82).

§ 321. Zus. Aus dieser Erkl. folgt, daß diese Curve nothw. zwei Zweige MAm, Mam hat; denn es ist sichtbar, daß man auf der Seite f und a, eine Reihe P. M, m finden kann, welche dieselben Eigensch. haben als die Reihe der P. ↓, die man nach A und F zu gefunden hatte. Diese zwei Curven, die sich ihre Convexität einander zu kehren, werden zusammen entgegengesetzte Hyperbeln genannt.

§ 322. Erkl. 1) Die der Grß. und Lage nach gegebene L. Aa soll die endliche Axe oder erste Axe der entgegengesetzten Hypb. genannt werden. 2) Die Endp. A, a von dieser Axe werdeu Aufgsp. oder Scheitel derselben Curven genannt. 3) Die P. F, f in gl. Entf. von den Endp. der Axe werden die Brennpunkte der entgegengesetzten Hypb. genannt. 4) Die Mitte C von Aa ist der Mittelp. der Curve. 5) Eine unbegrenzte gr. L. bCB durch den Mittelp. C und perpd. auf die erste Axe Aa ist die unbegrenzte Axe; und nimmt man auf beiden S. vom Mittelp. C auf dieser L. die Theile CB, Cb jede gl. der mittleren geom. Proportionale zwischen den Entf. A oder a von den beiden Brennp. F, f, so wird diese L. bB die zweite endliche Axe oder die zweite Axe der Hyperbeln MAm, maM sein. 6) Fällt man von einem bel. P. M der Curve einen Prpd. MP auf die so weit als nöthig verl. Axe Aa, so ist diese L. eine Odinate auf dieser Axe. 7) Die Theile AP, aP derselben Axe zwischen den Endp. A, a und dem P. P, wo die Ord. PM sie trifft, werden Abscissen genannt. 8) Eine Ord. und die ihr corresp. Absc. AP, aP werden ohne Unterschied Coordinaten genannt. 9) Eben so nennt man Ord. auf der zweiten Axe einen Prpd. MQ von einem P. der Hypb. auf dieser Axe. 10) Eben so sind die Theile BQ, bQ der zweiten Axe zwischen ihren Endp. und dem Treffp. der Ord. die dieser Ord. corresp. Absc. 11) Wir werden auch den Namen Absc. den Theilen auf jeder Axe zwischen den Mittelp. und dem Treffp. ihrer Ord. geben. Woraus folgt, daß in diesem Falle jede Ord. nur eine Absc. haben kann, und daß die Ord. auf einer Axe gl. den Absc. der andern Axe sein werden; und umgekehrt, wie es wegen des Prllgrms. CPMQ evident ist. 12) Eine dritte Proportionale zu den

beiden Axen wird Parameter der im ersten Gliede der Proportion stehenden Axe genannt werden. 13) Jede Linie von irgend einem P. der Hypb. nach einem der Brennp. heißt Radius-Vector oder kürzer Vector.

§ 323. I. Aufg. Man soll, der vorhergehenden Erklärung gemäß, eine Hyperbel oder die beiden entgegengesetzten Hyperbeln construiren, oder welches auf eins hinaus läuft, man soll von jeder dieser Curven so viel P. alsman will finden. (Fig. 82).

Aufl. Aus einem der Brennp. f als Mittelpunkt mit einem bel. Halbm. fG grß. als fA beschr. man einen Kr. mGM; hat man nachgehends auf der Axe nach C hin einen Theil $A\varphi = AF$ genommen, so beschr. man aus F als Mittelp. mit einem Halbm. gl. $\varphi G$ einen neuen Kr., der den ersten in zwei bestimmten P. m, M schneiden wird, welche in der geforderten Hypb. liegen werden. Denn da $A\varphi = AF$, so hat man $f\varphi = Aa$; folgl. auch $fG - \varphi G = Aa$, und folgl. $fM - FM$ auch gl. der ersten Axe Aa, weil die L. fM, FM durch Constr. gl. den L. fG, $\varphi G$ sind.

§ 324. Zus. Da man den Halbm. fG so groß als man will nehmen kann, so folgt daraus, daß jede der Hypb. aus zwei unendl. Zweigen bestehet, die sich immerwährend von der Axe Aa entfernen. Ueberdem ist es sichtbar, daß der P. G nicht zwischen den Scheitel A und den Mittelp. fallen kann, denn in diesem Falle können die aus den P. f, mit den Halbm. fG, $\varphi G$ beschr. Kr. sich nicht schneiden, nicht einmal in irgend einem P. sich berühren. Folgl. sind die L. fA und $\varphi A$ die Grenzen von allen L. fG, $\varphi G$ die zur Constr. jeder dieser Hypb. dienen, und die P. A und a sind folgl. P. der zu constr. Curve.

§ 325. In der Folge dieses Kap. wollen wir die erste

Axe Aa = 2a, CF oder Cf = e (die Excentricität) setzen; welches Af = e + a und AF = e — a geben wird; bezeichnet man also CB mit b, so ist, weil diese L. die mittlere geom. Prop. zwischen Af und AF ist (§ 322 No. 5), $b^2 = (a + e)(e - a) = e^2 - a^2$. Wir wollen eben so CP = x machen; und die Absc. aus dem Mittelp. genommen, giebt aP = x + a und AP = x — a. Endlich wollen wir die Ord. MP mit y bezeichnen. Es ist einzusehen, daß die ys die Absc. der zweiten Axe ausdrücken, während die xen die Ordin. auf derselben Axe ausdrücken; weil MP = CQ nnd CP = MQ. Den Parm. der halben grß. Axe wollen wir p und den der kl. Axe mit π bezeichnen.

§ 326. I. Lehrs. **Das Quadrat einer beliebigen Ordinate PM auf der großen Axe Aa verhält sich zum Rectangel AP . aP oder $CP^2 - CA^2$ der correspondirenden Abscissen; wie das Quadrat $CB^2$ der zweiten halben Axe CB zum Quadrat $CA^2$ der halben ersten Axe CA.** (Fig. 82).

Man muß also bew., daß $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$.

Bew. Aus M ziehe nach den Brennp. f, F die Vectoren Mf, MF; und es sei aus diesen P. als Mittelp. mit dem Halbm. MF ein Kr. DFGK beschr., der fM nöthigenfalls verl. in zwei P. D, K und die auch verl. Axe Aa in zwei P. F, G schneidet, so lange die Ord. MP nicht durch den Brennp. F gehet. Ueberdem sei fD in L halbirt. fL oder LD wird augenscheinlich gl. CA sein; und man wird, wie bei der Ellp. zeigen, daß LM = ½ fK, daß CP = ½ fG. Die Eigenschaften des Kr. geben

$$fD : fG = fF : fK \text{ oder } 2LM,$$

$$\text{oder } 2a : 2x = 2e : 2LM;$$

$$\text{oder } a : x = e : LM = \frac{ex}{a};$$

hieraus

$$\left\{\begin{array}{l} a : x = e + a : x + \frac{ex}{a} \\ a : x = e - a : \frac{ex}{a} - x \end{array}\right\},$$

und hieraus

$$a : x + a = e + a : a + e + x + \frac{ex}{a} = fM + fP.$$

$$a : x - a = e - a : a - e + x + \frac{ex}{a} = fM - fP.$$

Aus den beiden letzten Propt. hat man

$$a^2 : x^2 - a^2 = e^2 - a^2 : fM^2 - fP^2,$$

woraus, weil $y^2 = fM^2 - fP^2$, u. $e^2 - a^2 = b^2$ (§ 326), folgt $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$; folgl.

$$PM^2 : AP^2 . aP = CB^2 : CA^2.$$

§ 327. Zuſ. 1. Die Qdr. der Ord. auf der grß. Axe verh. ſich unter ſich, wie die Prod. aus ihren Abſc., weil dieſe Qdr. zu dem Rect. aus ihren Abſc. in dem beſtändigen Verh. von $CB^2 : CA^2$ ſtehen.

§ 328. Zuſ. 2. Aus der Propt. $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$ folgt die Gleich. $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$, welche die Natur dieſer Curven in Bezug auf ihre Axe ausdrückt, die Abſc. aus dem Mittelp. C genommen. Macht man $x = \pm a$, ſo findet man $y^2 = 0$. Woraus folgt, daß die Curve ihre Axe in den Endp. derſelben Axe ſchneidet, wie wir ſolches bereits bemerkt haben. Macht man $x < \pm a$, ſo werden die Werthe von y imaginair, und folgl. giebt es keinen P. der Curve zwiſchen dem Mittelp. und den Endp. der Axe. Macht man $x = \pm \infty$, ſo iſt auch $\pm y = \infty$, die beiden Zweige von jeder der entgegengeſetzten Hypb. entfernen ſich immerwährend von ihrer Axe. Macht man

$x = \pm e$, so findet man $y^2 = \frac{b^2e^2}{a^2} - b^2 = (e^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2}$;

folgl. $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$, weil $b^2 = e^2 - a^2$; folgl. $y = \frac{b^2}{a}$; d. h.

daß die in diesem Falle nothw. durch den Brennp. gehende Ord. eine dritte Proport. zur halben ersten und halben zweiten Axe ist und fogl. gl. dem halben Parm.

§ 329. II. Lehrs. Das Quadrat $MQ^2$ von einer Ordinate MQ auf der zweiten Axe Bb verhält sich zur Summe $CB^2 + CQ^2$ der Quadrate der halben Axe CB und der Abscisse CQ, wie das Quadrat der halben Axe CA zu dem Quadrat der halben Axe CB; d. h. jede Ordinate MQ auf der zweiten Axe giebt folgende Proportion (Fig. 82). $MQ^2 : CB^2 + CQ^2 = CA^2 : CB^2$.

Bew. Aus der Gleich. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ zieht

man $a^2(y^2 + b^2) = b^2x^2$; mithin $x^2 : y^2 + b^2 = a^2 : b^2$; oder $MQ^2 : CB^2 + CQ^2 = CA^2 : CB^2$, weil $PM = CQ$ und $QM = CP$.

§ 330. Zus. 1. Die Qdr. der Ord. auf der zweiten Axe verh. sich also unter sich wie die Summe der Quadr. von dieser halben zweiten Axe u. der aus dem Mittelp. genommenen corresp. Absc. CQ; weil das Verh. $CA^2 : CB^2$ ein beständiges ist.

§ 331. Zus. 2. Nennt man also immer x eine äußere

Ord. MQ und y die Absc. CQ, so ist $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$,

eine Gleich. der Hypb. in Betracht ihrer zweiten Axe bB, die zur Beschr. der Hypb. eben so wie die Gleich. in Betracht der ersten Axe dienen kann.

§ 332. Zus. 3. Wenn die beiden halben Axen CA und

CB gleich sind, so reducirt sich die letzte Gleichung auf $x^2 = y^2 + b^2$; die durch diese Gleich. bezeichnete Hypb. heißt gleichseitig. Woraus folgt, daß man diese Curve leicht mittelst des rechtw. Trs. beschr. kann, indem man immer auf der auf der zweiten Axe perpd. MQ einen endlichen Theil MQ gl. der Hypot. AQ des rechtw. Tr. ACQ nimmt.

§ 333. II. Aufg. Die Gleichungen mit dem Parameter für eine Hyperbel in Betracht der ersten und zweiten Axe zu finden, der Anfang der Abscisse immer im Mittelpunkt C angenommen.

Aufl. Da der Parm. p der ersten halben Axe durch folgende Propt. gegeben ist $a : b = b : p$ (§ 322), so hat man auch $a^2 : b^2 = a : p$. Mithin $p : a = b^2 : a^2$, aber man hat für eine bel. Ord. PM auf der ersten Axe, $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$; folgl. hat man auch $y^2 : x^2 - a^2 = p : a$, woraus $y^2 = \frac{px^2}{a} - ap$.

Eben so für den Parm. $\pi$ der halben zweiten Axe

$$b : a = a : \pi;$$

also auch $b^2 : a^2 = b : \pi$,

und auch $a^2 : b^2 = \pi : b$.

Man hat aber auch für jede Ord. QM auf der zweiten Axe

$$x^2 : y^2 + b^2 = a^2 : b^2;$$

deshalb

$$x^2 : y^2 + b^2 = \pi : b \text{ und folgl. } x^2 = \frac{\pi}{b} y^2 + b\pi.$$

§ 334. Zus. Aus der Propt. $a : b = b : p$, zieht man $ap = b^2$; also $a^2 + b^2 = a^2 + ap$. Eben so aus $b : a = a : \pi$ zieht man $b\pi = a^2$; also $a^2 + b^2 = b\pi + b^2$. Nimmt man also auf der Axe CA auf beiden Seiten aus dem Mittelp. C eine Absc. $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$ oder $\sqrt{(a^2 + ap)}$,

so findet man $y = p$, wenn man $a^2 + ap$ statt $x^2$ in der Gleich. $y^2 = \frac{px^2}{a} - ap$ setzt. Und eben so, wenn man auf der Axe CB auf beiden Seiten aus dem Mittelp. C eine Absc. $= \sqrt{(b^2 + a^2)}$ oder $\sqrt{(b^2 + b\pi)}$ nimmt, so findet man $x = \pi$; aber $\sqrt{(b^2 + a^2)}$ oder $\sqrt{(a^2 + ap)}$ oder $\sqrt{(b^2 + b\pi)} = AB$; woraus folgt, daß wenn man auf jeder der Axen Absc. gl. der L. AB nimmt, die correspond. Ord. gl. den Parm. $p$, $\pi$ der nämlichen halben Axe sein werden.

§ 335. III. Aufg. Wenn eine Hyperbel MAm, ihre Brennpunkte F, f, ihre Axe Aa und ein beliebiger Punkt auf dieser Curve gegeben sind; eine Tangente MT an diesen Punkt zu ziehen.

Aufl. Aus dem gegebenen P. M zieht man die Vect. MF, Mf; aus demselben P. als Mittelp. mit dem Halbm. FM beschr. man einen Kr., der fM in D schneiden wird, nach welchem man FD zieht und diese in E halbirt; endlich zieht man durch E und den gegebenen P. M die gr. L. MET, welches die verl. Tang. sein wird. Denn laut der Erkl. der Hypb. ist $fM - FM$ oder $fD = Aa$; es ist aber sichtbar, daß diese Eigensch. nur dem einzigen P. M zukommt. Um sich hievon zu überzeugen, so ziehe man aus irgend einem von M versch. P. m, mf, mD, mF. Wegen des $\triangle mDf$ hat man augenscheinlich $mf < mD + Df$; aber $mD = mF$, weil durch Constr. MT perpd. in der Mitte auf FD ist. Mithin $mf < mF + Df$; also $mf - mF < fD = Aa$; der P. m gehört also nicht der Hypb., weil der Unterschied der aus diesem P. nach dem Brennp. gezogenen L. der ersten Axe nicht gl. ist. Folgl. ist MT eine Berührungsl. in M.

§ 336. Zus. Aus dieser Propt. folgt, daß die Vect.

Mf, MF mit der Tang. MT auf einerlei Seiten gl. W. FMT, KMm machen; denn $\angle FMT = fMT$, durch Constr. aber W. $fMT = KMm$. Ein Lichtstrahl FM aus dem Brennp. F nach irgend einem P. M der Curve wird in diesem P. in einer Richtung KM, die verl. durch den andern Brennp. f geht, zurückgeworfen.

Die vorhergehende Constr. kann man auch gebrauchen, um eine Tang. zu finden, die durch einen in der Ebene der Curve aber außerhalb derselben gegebenen P. m geht; wie es für die Ellipse (§ 244) geschehen ist. Dieselbe Constr. läßt auch erkennen, ob ein P. innerhalb oder außerhalb der Curve liegt oder selbst einer der P. von dieser Curve ist.

§ 337. Erkl. 1) Man nennt Subtangente den Theil der Axe zwischen dem Endp. P, der durch den Berührungsp. gezogenen Ord. und dem P. T wo dieselbe Axe durch die hinreichend verlängerte Tangente geschnitten wird. Woraus evident folgt: daß der Theil Qt der zweiten Axe auch die Subtang., auf dieser Axe genommen, sein wird. 2) Ein Perpd. MR im Berührungsp. M auf der Tang. bis zur Axe in R, heißt die Normale. 3) Der Theil PR zwischen dem Endp. P der Ord. PM durch den Berührungsp. und dem Treffpunkt R der Axe mit der Normale PR heißt die Subnormale.

§ 338. IV. Aufg. Den analytischen Ausdruck der auf der großen Axe genommenen Subnormale PR zu finden. (Fig. 82).

Aufl. Da MR, FD beide auf der Tang. perpd., so sind sie prll.; mithin die Tr. fFD, fRM ähnlich; daher $fD : fF = MD$ oder $MF : FR$.

d. h. $2a : 2e = \frac{ex}{a} - a : FR$ (§ 327),

$fM = DM = LM - LD = \frac{ex}{a} - a$

$$\text{also } FR = \frac{e^2x - a^2e}{a^2};$$

Nimmt man $FP = x - e$ (wenn der P. P jenseits F in Bezug auf A fällt) von FR ab, oder setzt zu FR die $FP = e - x$ hinzu, im Fall P zwischen A und F fällt, so wird man haben

$$\text{Subn. } PR = \frac{e^2x - a^2e}{a^2} - \frac{a^2x + a^2e}{a^2} = \frac{e^2 - a^2}{a^2} \cdot x,$$

oder $b^2$ statt $e^2 - a^2$ gesetzt; $PR = \dfrac{b^2x}{a^2}$.

§ 339. Zus. 1. Die Subn. PR und die Absc. CP sind also in einem constanten Verh. $CB^2 : CA^2$; denn aus der Gleich. $PR = \dfrac{b^2x}{a^2}$ zieht man $PR : x = b^2 : a^2$ oder $PR : CP = CB^2 : CA^2$. Nimmt man die Hypb. gleichseitig an, so hat man immer $PR = CP$, weil in dieser Curve die halben Axen einander gl. sind. Die Entf. des P. P von R ist also gl. der von demselben P. P bis zum Mittelp. C.

§ 340. Zus. 2. Es ist leicht, die Subnorm. Qr auf der zweiten Axe zu haben, wenn man PR kennt. Die ähnlichen Tr. RPM, MQr geben

$$PR : PM = MQ : Qr, \text{ d. h. } \frac{b^2x}{a^2} : y = x : \frac{a^2y}{b^2},$$

woraus leicht wie für die erste Axe abzuleiten ist

$$CQ : Qr = CB^2 : CA^2.$$

§ 341. V. Aufg. Den analytischen Ausdruck der auf der großen Axe genommenen Subtangente zu finden. (Fig. 82).

Aufl. Wegen des rechtw. Tr. RMT hat man

$$PR : PM = PM : PT; \text{ also}$$

$$PT = \frac{PM^2}{PR} = (x^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2x} = \frac{x^2 - a^2}{x}.$$

§ 342. Zus. 1. Aus dem bekannten analytischen Ausdruck der Subtang. auf der ersten Axe wird es leicht sein, den Ausdruck von der Subtang. auf der zweiten Axe zu finden. Denn die ähnlichen Tr. PMT, QtM geben

$$PT : PM = QM : Qt;$$

und analytisch

$$\frac{x^2 - a^2}{x} : y = x : \frac{x^2 y}{x^2 - a^2}; \text{ aber } (\S\ 331)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2), \text{ und } x^2 - a^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2};$$

diese Werthe eingeführt geben

$$Qt = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2) \cdot \frac{b^2}{a^2 y^2} \cdot y = \frac{b^2 + y^2}{y}.$$

§ 343. Zus. 2. Zieht man $PT = \frac{x^2 - a^2}{x}$ von $CP = x$ ab, so hat man $CT = \frac{a^2}{x}$; und eben so, wenn man von $Qt = \frac{y^2 + b^2}{x}$ abzieht $CQ = y$, so findet man $Ct = \frac{b^2}{y}$. Aus $CT = \frac{a^2}{x}$ zieht man $x : a = a : CT$, oder $CP : CA = CA : CT$; ebenfalls aus der Gleich. $Ct = \frac{b^2}{y}$ zieht man $y : b = b : \frac{b^2}{y}$ oder $CQ : CB = CB : Ct$. Es ist leicht, zu sehen, wie man sich dieser zwei Propt. bedienen kann, um mittelst einer der Axen an einen gegebenen P. M der Hyph. eine Tang. MTt zu ziehen. Denn es ist sichtbar, daß man nur eine Ord. MP oder MQ durch M ziehen darf, und nachgehends auf der ersten oder zweiten Axe eine dritte Proportionale CT oder Ct zu den Absc. CP oder CQ und zu jeder halben Axe CA oder CB zu suchen und tTM zu ziehen hat, welches die verl. Tang. sein wird.

§ 344. Zus. 3. Wenn man in der Gleich. $CT = \frac{a^2}{x}$, $x = a$ macht, und nachgehends $x = \infty$, so wird man im ersten Falle $CT = CA$ und im zweiten $CT = o$ finden; der Ort aller Treffp. der Axe und aller Tang., welche man an der Hypb. AMm ziehen kann, ist zwischen dem Mittelp. C und dem Scheitel A der Curve enthalten. Gleichfalls, wenn man in dem Ausdruck $Ct = \frac{b^2}{y}$, $y = o$ u. $y = \infty$ macht; so findet man zuerst $Ct = \infty$; woraus folgt, daß die Tang. in A und die zweite Axe Bb sich nur in einer unendlichen Entf. begegnen und folgl. prll. sind; die zweite Axe ist aber auf der ersten perpd.; es muß also auch die Tg. im Scheitel A auf der Axe Aa perpd. sein. Die zweite Annahme, daß $y = \infty$, giebt $Ct = \frac{b^2}{\infty} = o$; also auch in diesem Falle geht eine Tang., die einer unendlichen Absc. entspricht, durch den Mittelp.

§ 345. Zus. 4. Kennt man RP, PM, PT, CT, so wird es leicht sein, den analyt. Ausdruck von der Norm. MR, der Tang. MT, der L. AR, AT oder aR, aT und von CR zu finden.

1. Der rechtw. $\triangle RPM$ giebt $MR = \sqrt{(MP^2 + RP^2)}$

$$= \sqrt{\left[(x^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4x^2}{a^4}\right]} = \frac{b}{a}\sqrt{\left[x^2 - a^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}\right]}.$$

2. Der rechtw. $\triangle MPT$ giebt $MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)}$

$$= \sqrt{\left[(x^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2} + \frac{(x^2 - a^2)^2}{x^2}\right]}$$

$$= \sqrt{(x^2 - a^2)} \cdot \frac{\sqrt{(b^2x^2 + a^2x^2 - a^4)}}{ax}.$$

3. Setzt man $AP = x - a$ oder $aP = x + a$ zu

$PR = \frac{b^2x}{a^2}$ hinzu, so findet man $AR = \frac{b^2x + a^2x - a^3}{a^2}$ und $aR = \frac{b^2x + a^2x + a^3}{a^2}$.

4. Zieht man CT von CA ab oder setzt man Ca zu CT hinzu, so findet man $AT = a - \frac{a^2}{x} = \frac{ax - a^2}{x}$ und $aT = \frac{ax + a^2}{x}$.

5. Endlich, wenn man zu $CP = x$, $PR = \frac{b^2x}{a^2}$ hinzu setzt, so findet man $CR = \frac{a^2x + b^2x}{a^2} = \frac{e^2x}{a^2}$, weil $e^2 = a^2 + b^2$ (§ 325).

§ 346. Zus. 5. Eben so, weil man den algebr. Ausdruck der L. Qr, QM, Qt und Ct hat, so wird es leicht sein, wie in dem verh. Zus., die Werthe der L. Mr, Mt; Br, Bt oder br, bt und von der L. Cr, alle auf der zweiten Axe genommen, zu finden.

1. Wegen des rechtw. △MQr, $Mr = \sqrt{(MQ^2 + Qr^2)}$

$$= \sqrt{\left[(b^2 + y^2)\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4y^2}{b^4}\right]}.$$

2. Der rechtw. △MQt giebt ebenfalls

$$Mt = \sqrt{(MQ^2 + Qt^2)} = \sqrt{\left[(y^2 + b^2)\frac{a^2}{b^2} + \frac{(b^2 + y^2)^2}{y^2}\right]}$$

$$= \sqrt{(b^2 + y^2)} \cdot \frac{\sqrt{(a^2y^2 + b^2y^2 + b^4)}}{by}.$$

3. Setzt man $BQ = y - b$ oder $bQ = y + b$ zu Qr, so findet man Br oder $br = \frac{a^2y + b^2y \pm b^3}{b^2}$. (Man müßte BQ von Qr abnehmen, wenn Q zwischen C und B fiele).

4. Addirt man CB zu Ct oder subtrah. Ct von Cb,

wenn t zwischen C und b fällt, oder auch Ct von Cb abzieht, wenn t jenseits b in Bezug des Mittelp. C ist, so findet man Bt oder bt $= \frac{\pm b^2 \pm by}{y}$.

5. Endlich, wenn man Qr zu CQ = y setzt, so findet man $Cr = \frac{b^2y + a^2y}{b^2} = \frac{e^2y}{b^2}$.

§ 347. Anmerk. Von allen so eben aufgesuchten L. giebt es keine, von welcher man nicht leicht irgend eine Methode, an der Hypb. die Tang. zu ziehen, ableiten könnte, es sei mittelst der ersten oder der zweiten Axe; man begnügt sich aber gewöhnlich mit CT oder PT oder AT und aT auf der ersten Axe, und mit ihr corrrsp. auf der zweiten Axe; weil diese L. die einfachsten Aufl. und Constr. geben. Es leuchtet nicht weniger ein, daß man auch einen algebr. Ausdr. von denselben L. finden könnte, wenn man von den Parm. jeder der Axen Gebrauch machte. Wir wollen uns hierbei nicht weiter verweilen. Anfängern wird es sehr nützlich sein, sich dieser Untersuchung zu unterziehen, die in sich selbst keine Schwierigkeit hat.

## Von den Eigenschaften der Hyperbel in Bezug auf ihre Asymtoten; woraus man auch die Eigenschaften dieser Curve in Betreff auf ihre Diam. ableitet.

§ 348. Erkl. Eine Tangente, die eine Curve nur in einer unendlichen Entfernung berühren kann, heißt eine Asymtote.

§ 349. VI. Aufg. Die Asymtoten der Hyperbel zu bestimmen. (Fig. 83).

Aufl. Wir haben (§ 344) gesehen, daß, wenn man in dem Ausdr. von $CT = \frac{a^2}{x}$, $x = \infty$ macht, $CT = 0$

sein wird; d. h. der Mittelp. C ist ein P. in der Asymtote. Um davon noch einen andern P. zu haben, errichte ich in A einen Perpd. AR, begrenzt in R durch irgend eine Tang., und suche den analytischen Ausdr. dieser L. Die ähnl. Tr. TPM, TAR geben PT : PM = AT : AR d. h.

$$\frac{x^2 - a^2}{x} : \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{ax - a^2}{x} : AR,$$

$$\text{mithin } AR = b \sqrt{\left(\frac{x - a}{x + a}\right)}.$$

Macht man nun jetzt in diesem Werthe von AR, $x = \infty$, so werden Zähler und Nenner dieses Bruches einander gl.; und AR wird = b, welches folgende Constr. der Asymt. giebt. Aus dem Scheitel A einer der entgegengesetzten Hypb. seien auf beiden Seiten die Theile AD, Ad jede gl. CB und perpd. auf der nämlichen Axe genommen; nachgehends durch den Mittelp. C und den P. D, d die L. CD, Cd gezogen, welches die gesuchten Asymt. sein werden.

§ 350. III. Lehrs. Wenn man durch irgend einen Punkt M von einer der entgegengesetzten Hyperbeln die gerade Linie GMmF oder MGFm, parallel mit der zweiten oder mit der ersten Axe zieht, und sie auf der einen und der andern Seite durch die Asymtoten in G und F begrenzt, so ist immer MG . MF = CB² oder AD², oder MG . MF = CA². (Fig. 83).

Bew. 1) Wegen der ähnl. Tr. CAD, CPG hat man

$$AD^2 : PG^2 = CA^2 : CP^2,$$

und aus der Eigensch. der Ord. PM auf der ersten Axe Aa hat man § 326 CB² : PM² = CA² : aP × AP

$$CB^2 \text{ oder } AD^2 : PM^2 = CA^2 : CP^2 - CA^2.$$

Da nun beide Prop. einerlei Vordergl. haben, so stehen die Hintergl. auch in Prop. Mithin hat man

PG² :

$$PG^2 : PM^2 = CP^2 : CP^2 - CA^2;$$

also auch $PG^2 - PM^2 : PG^2 = CA^2 : CP^2 = AD^2 : PG^2$, wegen der ähnlichen Tr. CAD, CPG; aber da die Hinterglieder gl. sind, so ist auch $PG^2 - PM^2$ oder

$$= MF \cdot MG = AD^2.$$

2. Ist Mm prll. mit der ersten Axe, so hat man wegen der ähnl. Tr. CBD, CQG die Proportion

$$BD^2 : QG^2 = CB^2 : CQ^2$$

und durch die Eigensch. der äußern Ord. QM

$$CA^2 \text{ oder } BD^2 : QM^2 = CB^2 : CB^2 + CQ^2;$$

aus beiden Propt. folgt

$$QM^2 : QG^2 = CB^2 + CQ^2 : CQ^2;$$

und hieraus

$$QM^2 - QG^2 : QG^2 = CB^2 : CQ^2 = BD^2 \text{ oder } CA^2 : QG^2;$$

folgl. $QM^2 - QG^2$ oder $MF \cdot MG = CA^2$.

§ 351. Zus. Aus dieser Propt. folgt: 1) daß die Hypb. und ihre Asymt. sich immerwährend gegenseitig nähern, ohne sich jemals berühren zu können; oder, welches einerlei, es folgt aus diesem Lehrs., daß die L. MG niemals Null sein kann; denn in diesem Falle hätte man $MG \cdot MF$ oder $0 = AD^2$. Um übrigens von dieser Eigensch. der Hypb. einen richtigern Begriff zu haben, so darf man sich nur vorstellen, daß MG nothwendig in eben dem Maaße abnehmen muß, in welchem MF zunimmt. Also wenn $MF = \infty$, so ist $MG = \frac{1}{\infty}$; folgl. $MG \cdot MF = \frac{\infty \cdot 1}{\infty} = 1$ oder $AD^2$; weil die Einheit in diesem Falle unbestimmt ist und also gl. $AD^2$ sein kann. 2) Es folgt aus diesem Satze ferner, daß die L. MG, mF, oder mG, MF immer unter sich gl. sind; denn man hätte auf völlig gl. Art erwiesen, daß $mG \cdot mF = AD^2$, und überdem hat man vorher gesehen, daß die Ord. PM, Pm auch unter sich gl. sind.

§ 352. IV. Lehrs. Wenn man durch zwei beliebige Punkte M, N in einer der beiden entgegengesetzten Hyperbeln zwei beliebige von einer der Asymtoten begrenzten Parallelen ML, IN zieht, und zwei andere beliebige MK, NH ebenfalls unter sich parallel und von der andern Asymtote begrenzt; so hat man immer MK . ML = NH . IN. (Fig. 84).

Bew. Durch die P. M, N seien GMF, gNf prll. mit der zweiten Axe gezogen und durch die Asymt. begrenzt; wegen der Prllen. LM, IN; GM, gN sind die Tr. LGM, IgN ähnl. und geben

$$LM : IN = GM : gN;$$

gleichfalls wegen der Prllen. MF, Nf, MK, NH sind die Tr. MFK, NfH auch ähnl. und geben MK : NH = MF : Nf; beide Propt. zusammengesetzt geben

$$LM . MK : IN . NH = GM . MF : gN . Nf,$$

aber GM . MF = gN . Nf (§ 350); folgl. auch

$$LM . MK = IN . NH.$$

§ 353. Zus. 1. Läßt man die L. LM, IN sich um M und N drehen, bis sie mit MK, NH zusammenfallen, um Mk, Nh zu werden, so hat man immer MK . Mk = Nh . NH; und nimmt man noch an, daß eine von diesen L. Kk, z. B. sich prll. mit sich selbst bewegt, bis sie Tang. in A wird, so werden alsdann die Theile AD, Ad gl.; weil die L. PK, Pk; Mk, mK es immer sind. Also wie auch immer der W., den die Prllen. Kk, Hh mit der Axe bilden, beschaffen sein mag, so werden wir immer haben MK . Mk = NH . Nh = $AD^2$.

§ 354. Zus. 2. Aus diesem Lehrs. leitet sich eine sehr einfache Art ab, an einer Hypb., deren Asymt. man hat, eine Tg. zu ziehen. Es sei A der P., dessen Tang. man sucht; durch diesen P. und den Mittelp. C zieht man AC und nachgehends AE prll. mit der Asymt. CF; auf der andern Asymt.

nimmt man DE = CE; endlich zieht man durch D und den gegeb. P. A die L. DAd, welches die gesuchte Tang. ist; denn da AE || Cd, so sind CD, Dd in propt. Theile getheilt; da nun CD in E halbirt wird, so ist auch Dd in A halbirt nach § 352, folgl. wird DAd eine Tang. in A sein.

§ 355. Erkl. Man nennt conjugirte Diameter der Hypb. oder der entgegengesetzten Hypb. (Fig. 84) die gr. L. Aa, Dd, von welchen die eine durch den Mittelp. geht und sich auf beiden Seiten an den entgegeng. Hypb. endiget, und davon die andere eine der entgeg. Hypb. im Endp. der erstern berührt und sich in den Asymt. endiget. Zieht man durch den Mittelp. C eine Prlle. CQ mit der Tang. in A, und nimmt auf beiden Seiten des Mittelp. C die Theile CB = Cb = AD, so werden Aa, Bb auch conj. Diam. genannt.

§ 356. Die mit der Tang. AD prll. L. MPm auf beiden Seiten des Diam. und endigend in einer der Hypb., sind die dopp. Ord. zu diesen Diam. Es ist sichtbar, daß sie alle durch denselben so weit als nöthig verl. Diam. halbirt sind. Denn da AD = Ad, so ist PK = Pk, überdem Mk = mK; folgl PM = Pm. Die Theile AP, aP des Diam., die zwischen dessen Endp. bis zum Durchschn. einer Ord. liegen, sind die zu derselben Ord. corresp. Abscissen.

§ 357. Zus. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß wenn in einer Hypb. zwei conj. Diam. gl. sind, alle andern es auch sind; und daß ferner die in diesem Falle sogenannten gleichseitigen Hyperbeln, ihre Asymt. rechtw. haben. Denn da man AC = AD annimmt, und überdem CE = DE, so werden die Tr. CEA, DEA, die eine gemeinsch. S. AE haben, congruent sein; also ∠ DEA = CEA; mithin ist jeder dieser W. ein rechter, da es Nebenw. sind; weil nun Cd || EA, so stehen die Asymt. auf einander perpd.

Es folgt hieraus noch, daß jede nicht gleichs. Hyperb. keine unter sich gl. conj. Diam. haben kann; und umgekehrt.

§ 358. V. Lehrs. Das Quadrat $PM^2$ einer Ordinate PM auf einem beliebigen Diameter Aa verhält sich zum Rectangel $AP \cdot aP$ aus den correspondirenden Abscissen wie das Quadrat von AD oder von CB zu dem Quadrat des halben Diameters CA, auf welchem man die Abscissen nimmt. (Fig. 84).

Bew. Die ähnl. Tr. CAD, CPk geben

$Pk^2 : AD^2 = CP^2 : CA^2$; aber (§ 352 u. 353)

$AD^2 = MK \cdot Mk$ oder $Pk^2 - PM^2$;

setzt man also diesen Werth von $AD^2$ in die vorhg. Propt., so wird man leicht folgende Propt. folgern

$Pk^2 - AD^2 = Pk^2 - Pk^2 + PM^2 = PM^2 : AD^2$

oder $BC^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$;

woraus sich ergiebt

$PM^2 : CP^2 - CA^2$ oder $aP \cdot AP = CB^2 : CA^2$.

§ 359. Zus. 1. Bezeichnet man also AC oder aC mit a; CB oder Cb mit b; CP mit x und PM mit y; so hat man

$$y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2; \text{ woraus } y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2;$$

eine Gleich., welche die Natur der Hyperb. in Betreff ihrer Diam. eben so wie in Betreff ihrer Axen ausdrückt; und die gleichfalls zu ihrer Constr. dienen kann, wenn der W. der conj. Diam. gegeben ist.

§ 360. Zus. 2. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Eigensch. der conj. Diam. genau dieselben als für die Axen sind. Man würde also für eine äußere Ord. MQ auf dem zweiten Diam. finden

$MQ^2 : CB^2 + CQ^2 = CA^2 : CB^2$; denn aus der Gleich.

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - a^2 \text{ zieht man } x^2 : b^2 + y^2 = a^2 : b^2.$$

Es folgt ferner daraus (Fig. 83), daß man an einen bel. P. M eine Tang. mittelst eines Diam. CP und der durch den P. M auf diesen Diam. gezogenen Ord. ziehen kann, wenn man folgende Propt. macht: CP : CA = CA : CT; denn man kann sich vorstellen, daß eine auf ihre Diam. bezogene Hypb. aus einer andern Hypb. gebildet sei, welche diese Diam. als Axen hätte, und in welcher alle Ord. und die zweite Axe eine gl. Neigung gegen die erste hätte; und alsdann muß die Tang. an der neuen Curve wie vorher bestimmt werden, weil man sich hier in dem Falle des Lehrs. § 262 befindet. (Fig. 83).

§ 361. Erkl. Wenn man durch den Endp. A irgend eines Diam. mit den Asymt. Prllen. AE, Ae bis zu diesen Asymt. zieht; so wird das daraus entstehende Prllgrm. CEAe die Potenz der Hypb. genannt. (Fig. 84).

§ 362. VI. Lehrs. Wenn man durch zwei Punkte M, N einer Hyperbel oder der entgegengesetzten Hyperbeln, mit den Asymtoten Parallelen MR, ML; NO, NI bis zu diesen Asymtoten zieht, so ist immer ML . MR = NO . NI. (Fig. 84).

Bew. Dieser Satz ist nur ein besonderer Fall des vierten Lehrs., und wird genau eben so erw. Man darf nur den Bew. § 352 nachlesen, indem man die Tr. MRF, NOf statt der Tr. MFK, NfH setzt.

§ 363. Zus. 1. Es folgt hieraus, daß die Prllgrm. CRLM, CONI unter sich und der Potenz der Hypb. gl. sind; denn alle haben einen gl. von reciproquen Seiten eingeschlossenen W., weil man aus der Gleich.

ML . MR = NO . NI = AE . Ae zieht

ML : NO = NI : MR;

ML : AE = Ae : MR,

und NO : AE = Ae : NI.

§ 364. Zus. 2. Macht man also die Constanten $CE = a$, $EA = b$; und die Veränderlichen $CL = x$, $LM = y$; so wird man immer haben $xy = ab$, oder wenn man zwischen a und b eine geom. mittlere Propt. c sucht, $xy = c^2$, welches eine neue Gleich. der Hypb. in Betreff ihrer Asymt. ist. Aus dieser Gleichung zieht man leicht $y = \frac{c^2}{x}$ oder $y = c^2x^{-1}$. Macht man in dieser Formel $x = 0$, so wird $y = \frac{c^2}{0}$, welches eine unendliche Größe bezeichnet, und in diesem Falle fällt sie mit der Asymt. der Curve zusammen. Eben so, wenn man $x = \infty$ annimmt, so hat man $y = \frac{c^2}{\infty}$, welches eine unendliche kleine Größe wird. Zuweilen setzt man die Constante $c^2 = 1$ und drückt die Gleich. der Hypb. in Betreff ihrer Asymt. durch $y = x^{-1}$ aus.

§ 365. Zus. 3. Es ist leicht zu sehen, daß man in jedem an den W. $DCd$ anliegenden W. $\Delta CD$, $\delta Cd$, neue Hyperbeln $B\mu\nu$, $\gamma b\varphi$ mittelst der Potenzen $CEB\varepsilon$, $Ceb\eta$ gl. der Potenz $AEC\epsilon$ beschr. kann, indem man auf die so weit als nöthig verl. L. $ML$, $NI$ die Theile $\mu L$, $\nu I$ gl. den Ord. $ML$, $NI$ nimmt; diese zwei neue Hypb. nennt man die conj. Hypb. zu den zwei erstern, und umgekehrt die zwei erstern sind diese hier conj. Da ihre Bildung gänzlich dieselbe ist, so haben sie auch durchaus die nämlichen Eigensch. Diese vier Hypb. werden gl. sein, wenn die Axen gl. sind, oder welches einerlei, wenn die Asymt. rechtw. sind; oder auch, wenn zwei entgegengesetzte Hypb. gleichs. sind.

§ 366. Zus. 4. Wenn man ein Prllgrm. $\Delta\delta dD$ aus zwei Diam. $Aa$, $Bb$ macht, so ist es leicht zu sehen, daß

die Potenz CEAe davon $\frac{1}{8}$ ist; sie ist aber auch $\frac{1}{8}$ von dem Rect. aus den Axen, wenn man annimmt, Aa und Bb wären die Axen der entg. Hypb. Uebrigens sind diese zwei versch. Potenzen gl. einem bel. Prllgrm. CLMR (§ 363). Mithin sind diese Potenzen unter sich gl.; folgl. sind alle in conj. Hypb. eingeschr. und aus zwei Diam. gebildeten Prllgrm. unter sich und dem Rect. aus den Axen gl.

§ 367. Anmerk. Auch hier will ich zum Besten der Anfänger die Eigensch. der Hypb. aus einer andern Erkl. doch nur für rechtw. Coord. und Asymt. unabhängig von dem Vorhergehenden ableiten.

§ 368. Die Hyperbel ist eine kr. L., in welcher für rechtw. Coord. $y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$, die Bedeutung der Buchstaben wie bei der Ellipse (§ 287) genommen. Die Gleich. der Hypb. weicht also sehr wenig von der Gleich. der Ellp. ab, daß man in dieser nur $-a$ statt $+a$ setzen darf, um die Gleich. für die Hypb. aus ihr herzuleiten; auch kann man in so fern die Hypb. als eine Ellipse von einer neg. Axe ansehen.

§ 369. Die Gleich. der Hypb. giebt die Propt.

$$y^2 : (2a + x)x = p : a, \text{ auch } a = \frac{px^2}{y^2 - 2px} = \frac{px}{\frac{y^2}{x} - 2p};$$

$$\text{und } p = \frac{ay^2}{(2a + x)x} = \frac{ay}{x} \cdot \frac{y}{2a + x};$$

$$\text{und } x = -a \pm \sqrt{\left[a\left(a + \frac{y^2}{p}\right)\right]},$$

$$\text{und } y = \pm \sqrt{\left[\frac{px}{a}(2a + x)\right]}$$

$$\text{oder } \pm \sqrt{\left[\left(2p + \frac{px}{a}\right)x\right]};$$

und kann man auch hier, wie bei der Ellp. (§ 288), von

diesen vier Dingen zu jeden gegebenen dreien das vierte finden.

§ 370. Setzt man in $y^2 = \frac{px}{a}(2a + x)$ das $y = 0$, so ist $\frac{px}{a} = 0$ und auch $2a + x = 0$, oder einmal $x = 0$ und auch $x = -a$. Die Ord. wird also zweimal Null, in A und B (Fig. 85) den beiden Scheiteln der Hypb., wenn nämlich A der Anfang der Absc. und $AB = -a$. Auch ist hier, wie in der Ellp. (§ 291), die Axe begrenzt, die in der Parb. unendlich war.

§ 371. Weil $y = \pm\sqrt{\left[\frac{px}{a}(2a + x)\right]}$, so gehören zu jeder Absc. zwei gl. oder entg. Ord.; daß also auch die Hypb. wie die Parb. (§ 210) und Ellp. (§ 290) in gl. und ähnl. Hälften von der Abscissenaxe getheilt wird.

§ 372. Für jede pos. Absc. $x$ sind in $\frac{px}{a}(2a + x)$ beide Fact. so wie ihre Prod. pos., und also die Ordin. möglich. Auch wachsen hier die Ord. mit ihren Absc. ohne Aufhören, und geht also die Hypb., mit zwei Schenkeln, die sich von beiden Axen unendlich entfernen, mit zwei unendlichen Schenkeln (§ 215) längs der Abscissenaxe von A nach der Gegend zu, wo die pos. Absc. genommen werden, wie die Parb.

§ 373. Für jedes verneinte $x$ zwischen $0$ und $-2a$ ist der Factor $2a + x$ bejaht und giebt mit dem verneinten Factor $\frac{px}{a}$ ein verneintes Prod. Hierdurch wird die Ord. als die Qdrw. einer neg. Grß., unmöglich, oder es giebt für Absc. zwischen $0$ und $-2a$, zwischen den beiden Scheiteln A und B, keine P. der Hypb.

§ 374. Für $x = -2a$ wird $2a + x = 0$, und also auch die Ord. Null, oder die Hypb. hat in der Entfernung $AB = -2a$, den Punkt B mit der Axe gemein (§ 370). Wenn $x > -2a$ so sind beide Fact. neg., ihr Prod. aber pos., und also für ein solches neg. x die Ord. wieder möglich. So wie von hier an die neg. Absc. wachsen, wachsen auch die Ord., weil beide verneinte Factoren immer ein gewisses bejahtes Prod. geben. Also giebt es für veneinte Absc., die grß. als 2a sind, wieder P. der Hypb., und geht diese L. auch von B aus, mit zwei unendlichen Schenkeln BR, BS längs der neg. Absc. über $-2a$, dergestalt fort, daß sich selbige wie die ersten (§ 372) von beiden Axen unendlich entfernen.

§ 375. Die Hypb. hat also vier unendliche entgegengesetzte Schenkel, AM, Am, BR, BS, wenn man diese Schenkel von ihren Scheiteln A, B rechnet, wie solche die Fig. anzeigt. Insgemein aber zieht man die Schenkel so, wie sie die Rechnung nach der Gleich. giebt, d. i. nach der Menge der Ordinatenreihen für die angenommenen Absc., und da gehörten hier in der Hypb. die Bog. AM, BR zu einem, und Am, BS zu dem andern Schenkel, weil jener durch $y = +\sqrt{\left(2px - \frac{px^2}{a}\right)}$ so wie dieser durch $y = -\sqrt{\left(2px - \frac{px^2}{a}\right)}$ ausgedrückt wird. Weil aber doch das x in beiden Reihen sowohl pos. als neg. gesetzt werden kann, so geschiehet es zuweilen, daß man die Bog. als verschieden ansieht, die zwar zu einem y, aber zu entgegengesetzten x gehören.

In der Parb. (§ 208) giebt $y = \pm \sqrt{px}$ (Fig. 69) zwei verschied. Schenkel AM, Am; in beiden Fällen aber $x = \frac{y^2}{p}$

giebt die Rechnung nur einen MAm, hingegen zwei Schenkel, wenn man zugleich das Entgegensetzte der Absc. (y) mit in Betrachtung zieht. Wenn man diesen Untersch. weiß, so wird man sich nicht wundern, wenn nach Verschiedenheit der Gleich. oft einerlei P. der L. zu versch. Schenkeln gerechnet werden.

§ 376. Punkte in der Hyph. auf eine ähnl. Art, wie bei der Parb. (§ 209) und Ellp. (§ 292), zu finden, wähle man den Ausdruck $y = \pm \sqrt{\left[\left(2p + \frac{px}{a}\right)x\right]}$, setze die (Fig. 86) Ordinatenaxe GH rechtw. durch den Anfangsp. A der Absc. und nehme AD = 2a; BE = 2p und ziehe ED. Die willkührliche Absc. AP trage man aus D in O, so daß DO = AP, so ist alsdann die Prlle. OS mit DE gezogen,

$$AD : AE = DO : ES, \text{ d. h. } 2a : 2p = x : ES = \frac{px}{a},$$

und also durchgängig $SA = AE + ES = 2p + \frac{px}{a}$. Zeichnet man nun über ein SP, zwischen den zugehör. S und P, einen Halbkr. SIIP, so schneidet derselbe auf AG eine mittlere Propt. $AII = \sqrt{\left[\left(2p + \frac{px}{a}\right)x\right]}$ ab, welcher man durch eine Prlle. IIM mit der Absciſſenaxe die correſpond. Ord. PM zu der angenommenen Absb. gl. macht. Für die negativen Ordin. zu dieſen Abſc. nehme man durchgängig Pm = PM, ſo iſt dem Ausdr. $y = \pm \sqrt{\left[\left(2p + \frac{px}{a}\right)x\right]}$ auf der Seite der poſ. Abſc. Genüge geſchehen.

Nimmt man ferner AB = 2a und macht Bp = AP, ſo ſchneidet die rückw. verl. IIM ein pM = PM als eine Ordin. der zugehörigen neg. Abſc. Ap ab, und muß man auch hier pm = pM für den untern Schenkel machen.

Denn man setze $AP = \nu$, so ist $Ap = -2a - \nu$, aber beide Werthe anstatt $x$ in die Gleichung substituirt geben $y = \pm \sqrt{\left[2p\nu + \frac{p}{a}\nu^2\right]}$, daß also für pos. und neg. Absc., deren Endp. von den beiden Scheitelp. gleichw. entf. liegen, die Ord. durchgängig gl. sind.

§ 377. Weil die Gleich. der Hypb. bloß in dem Zeichen des letzten Gliedes von der Ellipsengleichung unterschieden ist, so nennt man auch hier, die Aehnlichkeit zwischen beiden beizubehalten, die mittlere Propt. zwischen der Hauptaxe (die man bisweilen auch die Zwerchaxe nennt) und dem Parm., die kleine oder besser die zweite Axe oder die Nebenaxe. Wenn also $\sqrt{4ap} = 2b$, so ist $a = \frac{b^2}{p}$ und $p = \frac{b^2}{a}$, und giebt dieser Werth von p, in die Gleich. $y^2 = p\left(2x + \frac{x^2}{a}\right)$ substituirt,

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2x^2}{a^2} = \left(2b + \frac{bx}{a}\right)\frac{bx}{a};$$

eine Gleich. der Hypb. aus den beiden Axen.

§ 378. Wenn (Fig. 85) $AC = a = \frac{1}{2}AB$, so ist C der Mittelp. der Hypb. Es giebt aber hier keine Ord. durch den Mittelp. (§ 373) wie bei der Ellp. Auch geht die Nebenaxe nicht durch diesen P.; denn diese kl. Axe, nach der Aehnlichkeit der Ellp. ausgedrückt, ist eigentlich $\sqrt{(-4ap)}$ und also nur eingebildet oder an sich unmöglich.

§ 379. Für Coord. $CP = u$, $PM = y$ wäre $u = a + x$ oder $x = u - a$; dieser Werth von x anstatt x in der Gleich. § 377 gesetzt, giebt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}u^2 - b^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$, eine Gleich. aus dem Mittelp. Eben diese Gleich. hätte man erhalten, wenn man die eingebildete kl. Axe $\sqrt{-4b^2}$

oder $2b\sqrt{-1}$ anstatt $2b$ in die Ellipsengleichung (§ 297) gesetzt hätte.

§ 380. Man lege durch den Mittelp. C einen unbestimmten Prpd. Dd und nehme auf ihm zu beiden Seiten von C, pos. und neg. Absc. (y), so ist aus voriger Gleich. die Ord. $u = \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2\right)}$, zu welcher, nach der Rechnung, die beiden Schenkel MAm und RBS, über und unter der Abscissenaxe Dd gehören, die einander gl. und ähnl. sind. Aber beide Schenkel werden auch durch Q'II in gl. und ähnl. Hälften getheilt, daß also innerhalb der vier rechten W. um C: DCA, dCA, dCB, DCB gl. und ähnl. Theile der Hypb. liegen, wie bei der Ellp. (§ 299).

§ 381. Die Alten betrachteten die auf entgegengsetzten Seiten von Dd liegenden beiden Schenkel MAm, RBS als versch. L. und nannten sie entgegengesetzte Hyperbeln. Doch machen sie eigentlich nur eine Hyperbel und eine einzige zusammenhängende Linie aus, ob sie gl. nirgends zusammen reichen; denn diese beide Scheitel sind durch die geheimen Bande der Gleich. $u^2 = a^2 + \frac{a^2y^2}{b^2}$, die sich nicht weiter in rationale Fact. aufl. läßt, auf das genaueste und vollkommenste mit einander vernüpft; und dieses gilt von allen regulären L., ihre Theile mögen auch noch so sehr zerstreut und außer einander zu liegen scheinen. Nur muß man entgegengesetzte und conjugirte Hyperbeln, von denen weiter unten vorkommen wird, nicht mit einander vermengen. Siehe § 365, § 398.

§ 382. Für den Brennp. (§ 222) F ist der Ord. Qdr. $p^2$ oder $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} u^2 - b^2$ und $u^2 = a^2 + b^2$. Wenn also

u hier die Abscisse für den Brennpunkt bedeutet, so ist $u = \pm \sqrt{(a^2 + b^2)}$ für die beiden Längen der Excentricitäten CF, Cf, und giebt es hier, wie bei der Ellp., zwei Brennp. Auch ist

$$AF = CF - a = \sqrt{(a^2 + b^2)} - a.$$

§ 383. Die Differenz der Linien fM, FM aus beiden Brennp. f, F nach einem bel. P. M der Hypb. zu finden, setze man, wie vorhin, CP = u und CF oder $a^2 + b^2 = e^2$, so ist

$$FM^2 = FP^2 + PM^2 = (u-e)^2 + y^2 = u^2 - 2eu + e^2 + y^2$$

$$= u^2 - 2eu + a^2 + b^2 + \frac{b^2}{a^2}u^2 - b^2$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2}u^2 - 2eu + a^2 = \frac{e^2u^2}{a^2} - 2eu + a^2$$

$$= \left(\frac{eu}{a} - a\right)^2,$$

Mithin $$FM = \pm \frac{eu}{a} \mp a;$$

wo man für ein pos. FM, wie hier gesucht wird, nur die obern Zeichen, wie bei § 309 braucht, weil hier allemal $u = CF > a$ ist. Eben so ist:

$$fM^2 = fP^2 + PM^2 = (e + u)^2 + y^2,$$

$$= e^2 + 2eu + u^2 + \frac{b^2}{a^2}u^2 - b^2,$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2}u^2 + 2eu + a^2,$$

$$= \frac{e^2u^2}{a^2} + 2eu + a^2,$$

$$= \left(\frac{eu}{a} + a\right)^2.$$

Hier ist also $fM = \pm \frac{eu}{a} \pm a,$

Wir haben nun

$$fM = \pm \frac{eu}{a} \pm a$$

$$\text{und } FM = \pm \frac{eu}{a} \mp a$$

folgl. $fM - FM = \pm 2a$ oder auch nur $+ 2a$, wenn man in beiden Fällen nur die obern Zeichen braucht, weil man hier die Differenz der L. aus ihrer absoluten Länge sucht, da hingegen die Rechnung auch zugleich die Lagen dieser L. mit angiebt. Der Untersch. beider L. in der Hypb. ist also der Zwerchaxe oder der gr. Axe gleich, wie in der Ellp. die Summe (§ 309).

§ 384. Hieraus fließt eine bequeme Methode, die Hypb. aus ihren Brennp. F, f zu beschr. Wenn nämlich in einer L. die Zwerchaxe AB (Fig. 87) mit den Brennp. F, f gegeben worden, so nimmt man Stücke auf der verl. Axe, wie AP, AQ, die wenigstens nicht kl. als AF sind, und beschr. mit BP aus F und f über und unter der Axe und eben so mit BP — AB, d. i. mit AP aus eben diesen P. Bg., so schneiden diese Bg. einander in vier P. p der Hypb.; und so geben BQ und AQ wieder vier neue P. q, daß man auf diese Art so viel P. als man nur will, finden kann. Auf diese Eigensch. der Brennp. (§ 218, 309, 383) gründen sich gewisse Werkzeuge, die Parb., Ellp. und Hypb. durch eine stetige Bewegung, so wie den Kr. durch den Zirkel zu beschr., die man beim Wolf, Hopital und andren gezeichnet findet. Ihr Gebrauch ist bisweilen nicht so bequem und so sicher als des Zirkels; daher auch dieselben seltner anzutreffen sind. (Francisc. à Schooten de organica conicarum Sectionum in plano descriptione, ist das vierte Buch von Exercitat. mathemat. Lib. V. Leid. 1657).

## Von den Asymtoten der Hyperbel.

§ 385. Aus dem Scheitel A (Fig. 85) der Hypb. richte man einen Prpd. AE = b auf und lege durch C, E eine unbegr. L. Für jede willkührliche Absc. CP = u aus dem Mittelp. ist allemal

$$CA : AE = CP : PL$$

oder $a : b = u : PL = \frac{bu}{a}$, und, PL = z gesetzt, $z^2 = \frac{b^2u^2}{a^2}$. Es ist aber auch durchgängig

$$PM^2 \text{ oder } y^2 = \frac{b^2u^2}{a^2} - b^2 \text{ und also } z^2 - y^2 = b^2$$

$$\text{oder } z - y = \frac{b^2}{z + y} = PL - PM = LM.$$

Nun wachsen die PL und PM mit den Absc. u ohne Ende, daß also PL + PM oder x + y immer ein Größeres wird, beide Differ. aber, d. i. LM abnimmt, weil z + y im Divisor wächst und $b^2$ unverändert bleibt. Indem also LM beständig abnimmt und kl. als jede angebliche Grß. werden kann, doch aber immer etwas bleibt, so sagt man, die Hypb. nähere sich, von ihrem Scheitel an, der gr. L. CL immer mehr und mehr, ohne doch jemals mit ihr zusammen zu fallen, und nennt diese gr. L. die Asymtote der Hyperbel.

§ 386. Man pflegt bisweilen die Asymt. als Tang. an unendlich von den Axen entfernten P. der kr. L. anzusehen. Man würde sich aber irren, wenn man glaubte, einen solchen P. angeben zu können. Denn die unendlich grß. und kl. Grß. sind ihrer Natur nach nicht zu bestimmen, und der Ort, wo die Hypb. mit ihrer Asymt. nach dem Begriffe der Tang. zusammen trifft, ist nirgends, sondern man be-

dient sich nur solcher Begriffe und Ausdr. des Unendlichen, die Schlüsse kürzer zusammen zu ziehen und die Rechnung dadurch zu erleichtern. Und hieraus, mit § 220, 221 verglichen, übersieht man auch, daß die Parb. keine Asymt. haben kann; denn für sie wäre AE = $\frac{1}{2}$y (§ 221), dieses y aber gehörte alsdann zu einem der von dem Scheitel unendl. entfernten P. der Axe, und wäre also, so wie die Entf. des P. C von A, selbst unendlich. Eine Asymt. der Parb. müßte also von der Absciſſenaxe unendlich entfernt sein, und diese unendl. Entf., in der man sich diese L. von der Axe denken müßte, macht die Asymt. der Parb. unmöglich.

§ 387. Die Betrachtung der Asymt. ist in der Analysis von sehr erheblichem Nutzen. Denn jeder unendliche Ast einer kr. L. nimmt nach und nach, ganz unmerklich, die Natur eines parabolischen oder hyperbolischen Schenkels an, dergestalt, daß man überhaupt alle unendliche Schenkel in parabolische und hyperbolische eintheilt. Die Hypb. oder hyperbolischen Aeste haben Asymtoten; die Parb. oder parabolischen Aeste hingegen haben keine. Es giebt aber auch krumme L., die sich einer gegebenen kr. L. ohne Aufhören nähern: krummlinige Asymtoten. Auch übersieht man sogleich, daß der Bog. einer kr. L. gegen seine gradlinige Asymt. erhaben sein müsse; und daß, wenn er etwa irgend gegen sie hohl wäre, wie bei der Conchoide, so muß es einen Ort geben, nach welchem der Bog. gegen sie erhaben wird; und einen solchen Ort nennt man einen Wendungspunkt.

§ 388. Der Theil CL gehört für den Schenkel AM, und wenn man CL unterwärts verlängert, so gehört CO eben so zu dem Schenkel BS, mit dem sie auch niemals zusammenfällt. Beide Theile machen zusammen eine Asymt. OL aus. Nimmt man unter der Axe Ae = AE, so ergiebt

sich

sich noch eine Asympt. Nl, die durch die Gleich. $QN = -\frac{bu}{a}$ ausgedrückt wird, weil $CQ = -u$. Ihre Theile CN, Cl gehören zu den Schenkeln BR, Am, und beide Asymptoten schneiden einander unter dem W. LCl, den man den Asymptotenwinkel nennt, und der nach den verschiedenen Verh. beider Axen veränd. ist; spitzig, wie hier, oder stumpf oder rechtwinklig.

§ 389. Weil $LM = z - y$ und $Ml = z + y$, so ist $ML \cdot Ml = (z - y)(z + y) = z^2 - y^2 = b^2$ (§ 385) und also unveränderlich.

§ 390. Man ziehe QM mit Cl parallel, so ist

$\angle QML = ClL = ClL$ weil $PL = Pl$,

und bei P rechte W., daher auch $Cl = CL$. Und weil $\triangle QML \backsim \triangle ClL$, so ist auch $QM = QL$. Ferner ist AE rechtw. auf CA, und also CE oder $Ce = \sqrt{(CA^2 + AE^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ in der Bedeutung dieser L. Es ist aber $Ee = 2b$ dem Ll prll., und also $\triangle CEe \backsim \triangle CLl \backsim \triangle QLM$;

folgl. ist $CQ : Ml = QL : LM$

und $QL : LM = CE : Ee$,

also $CQ : Ml = CE : Ee$,

$$\text{und } CQ = \frac{Ml \cdot CE}{Ee} = \frac{(z + y)\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2b}.$$

Eben so ist $Ee : eC = LM : QM$ und

$$QM = LM \cdot \frac{eC}{Ee} = \frac{b^2}{z + y} \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2b} = \frac{b\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2(z + y)},$$

wenn man den Werth von LM aus § 385 nimmt. Also ist

$$CQ \cdot QM = \frac{(z + y)\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2b} \cdot \frac{b\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2(z + y)}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{e^2}{4}.$$

§ 391. Den Werth von CQ . QM kann man noch weit kürzer folgendergestalt finden: in den ähnl. Tr. ClL, QML

$$\begin{array}{l} \text{ist } Ll : Cl = LM : QM \\ \underline{Ll : CL = Ml : CQ} \\ Ll^2 : CL . Cl = Ml . LM : CQ . QM, \end{array}$$

oder, wenn man die Werthe $Ll = 2z = \frac{2bu}{a}$

$$Cl = \sqrt{(u^2 + z^2)} = \sqrt{\left(u^2 + \frac{b^2u^2}{a^2}\right)} = CL$$

und LM . Ml = $b^2$ (§ 389) gehörig substituirt,

$$\frac{4b^2u^2}{a^2} : u^2 + \frac{b^2u^2}{a^2} = b^2 : CQ . QM$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{4} = \tfrac{1}{4}e^2.$$

Wollte man die Werthe von CQ, QM einzeln haben, so fände man sie aus obigen Propt., nach welchen

$$CQ = Ml . \frac{CL}{Ll} = (z + y)\frac{\sqrt{(u^2 + z^2)}}{2z} =$$

$$(z + y) . \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2b} \text{ und}$$

$$QM = LM . \frac{Cl}{Ll} = (z - y) . \frac{\sqrt{(u^2 + z^2)}}{2z}$$

$$= (z - y)\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2b},$$

und sind beide Werthe dem obigen gefundenen gl., wenn man bei dem letzten in z − y sein Gleiches: $\frac{b^2}{z + y}$ subst.

§ 392. Wenn man CQ, QM als Coord. auf der Asympt. ansieht, und beide durch p, q ausdr., so ist $p . q = \frac{a^2 + b^2}{4}$, eine Gleich. der Hypb. zwischen ihren Asympt.

§ 393. Man ziehe auch AI mit Cl oder QM prll., so

ist $\angle CAI = ACe = ACE$ und also $CI = AI$ u. $CI . AI = CI^2$. Aber CI AI sind ebenfalls Coord. p, q auf der Asymt., und also auch $CI . AI$ oder $CI^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Dieses Qdr. von AI oder CI nennt man die Potenz der Hypb., weil nämlich das Prod. jeder zwei Coord. auf der Asympt diesem unveränderl. Qdr. gl. und also beständig ist. Nennt man daher die Seite dieses Qdrs. $\alpha$, so ist $p . q = \alpha^2$. Eben so ist für zwei andere Coord. x, y auch $xy = \alpha^2$ und also $pq = xy$ oder $p : x = y : q$, d. i. die Absc. verh. sich hier umgekehrt wie die Ord.

§ 394. Aus § 391 ist $CQ = (z + y) \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2b}$ und $QM = (z - y) \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2b}$, also $CQ : QM = z + y : z - y$. Für $CQ = QM$ müßte $z + y = z - y$ sein, welches in keinem andern P. der Hypb. möglich ist, als wo $y = 0$, d. i. in dem Scheitel A, wo nämlich $AI = CI$, wie vorhin gezeigt worden.

§ 395. Weil durchgängig $xy = \alpha^2$ oder $CQ . QM = CI^2$, so ist $CI = \sqrt{(CQ . QM)} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2} = \frac{1}{2}e$ oder die Seite der Potenz der Hypb. ist jederzeit die mittlere Proportionallinie zwischen willkührlichen Coordin. auf der Asympt. Wäre CI gegeben, und man wollte für ein bel. CQ das zugehörige QM suchen, so wäre $QM = \frac{CI^2}{CQ}$ die dritte Prop. zu CQ und CI; so wie für ein belieb. QM ein gesuchtes $CQ = \frac{CI^2}{QM}$ die dritte Prop. zu QM und CI sein würde.

§ 396. Nähme man auf der Asympt. CL (Fig. 88) ein CQ zwischen C und I und also kl. als CI, so wäre das zu-

gehörige QM, nothwendig gr. als CQ und CI und würde die Axe schneiden, aber dennach würde auch hier CQ . QM = $CI^2 = \alpha^2$ sein; denn weil CQ mit KM und eben so QM mit CK prll., so ist

$$CQ . QM = CK . KM = CI^2 = \alpha^2.$$

§ 397. Die Gleichung $xy = \alpha^2$ ist einfacher als die übrigen Gleichungen der Hypb., wie insgemein die Gleich. für kr. L. mit Asympt., am einfachsten sind, wenn man die Coord. auf den Asympt. nimmt. Weil in $y = \frac{\alpha^2}{x}$ (die Verzeichnung ist § 137 gezeigt worden) für eine Reihe pos. und neg. Absc. nur eine Reihe pos. und neg. Ord. kommt, so giebt hier die Rechnung die vier Schenkel SM, SN, sP, sO (Fig. 53) in Absicht auf die Scheitel S, s, nur als einen einzigen Scheitel MSNOsP (§ 375); man müßte denn, wie bisweilen geschieht, die zu entgegengesetzten Absc. gehörigen Bg. MSN, PsO, für versch. Schenkel rechnen. In $y = \frac{\alpha^2}{x}$ nimmt die Ord. ab, so wie die Absc. wächst; und nähert sich also die kr. L. immer mehr und mehr der Abscissenaxe, je weiter sie sich von der Ordinatenaxe entfernt und da sie bei jeder endl. Absc. niemals aufhören kann etwas zu sein, so wird die Abscissenaxe ihre Asymt. Man kann aber von $x = \frac{\alpha^2}{y}$ eben das sagen, was vorher von y gesagt worden, und wird folgl. auch die Ord.-Axe eine Asympt., daß also die Hypb. ihre beiden Axen zu Asympt. hat; und zugleich ein Beisp. giebt, daß ein unendlicher Schenkel sich der einen Axe unendlich nähern könne, indem er sich von der andern unendlich entfernt (§ 215).

§ 398. Zu der Gleich. $y = \frac{\alpha^2}{x}$, gehören also die ent-

gegengesetzten (§ 381) Hypb. FAG, HBP (Fig. 88) innerhalb der Verticalwinkel als eine einzige L. Eine Gleich. wie $y = -\frac{\alpha^2}{x}$ gäbe eben so die entgegengesetzten Hypb. WDL, OEN in die Nebenw. der erstern. Diese wird die conjugirte Hypb. zu der vorigen genannt, macht aber keinesweges mit ihr eine einzige kr. L. aus, sondern die Gleich. $y^2 - \frac{\alpha^4}{x^2} = 0$ oder $y^2 = \frac{\alpha^4}{x^2}$, die alle vier Schenkel auf einmal gäbe, stellt das System zweier Hypb. vor, weil sich ihre Gleich. in die beiden rationalen Faktoren $y = \pm \frac{\alpha^2}{x}$ aufl. läßt, von welchen jeder seine eigene L. vorstellt. Da sich nun je zwei und zwei Schenkel dieser conj. Hypb. in den Nebenw. ihrer gemeinsch. Asympt. unendlich nähern, so entsteht hier, wenn man sich in dieser Asympt. vier vom Mittelp. unendl. entf. Vereinigungsp. denkt, ein symmetrisches Polygon von unendlich vielen (§ 146) unendlich stumpfen eingehenden und vier hervorspringenden unendl. spitzigen W.; und kann man daher dieses Polygon gleichsam als in eine einzige L. eingeschlossen ansehen und seinen Raum, wie den elliptischen Raum, zu einem Gegenstande der Betrachtung machen.

§ 399. Wenn eine nach Gefallen gezogene gr. L. die Hypb. in P. wie M, $\mu$ (Fig. 89) und die Asympt. in R, $\varrho$ schneidet, so ist alsdann RM $= \varrho\mu$. Denn man ziehe MD, $\mu\varrho$ mit den Asympt. C$\varrho$, CR prll., so ist wegen der ähnl. Dr. RDM, RC$\varrho$, $\varrho\delta\mu$,

$$MR : MD = R\varrho : C\varrho$$

$$\text{und } R\varrho : C\varrho = \mu R : C\delta,$$

$$\text{und folgl. } MR : MD = \mu R : C\delta \text{ oder } MR = \frac{MD \cdot \mu R}{C\delta};$$

eben so ist $\mu\varrho : \mu\delta = R\varrho : CR$,

und $R\varrho : CR = M\varrho : CD$;

folgl. $\mu\varrho : \mu\delta = M\varrho : CD$ oder $\mu\varrho = \frac{M\varrho \,.\, \mu\delta}{CD}$,

welchen Werth von $\mu\varrho$ man auch sogleich aus dem obigen von MR durch bloße Verwechselung der griechischen und lateinischen Buchst. hätte herleiten können.

Es verh. sich also

$$MR : \mu\varrho = \frac{MD \,.\, \mu R}{C\delta} : \frac{M\varrho \,.\, \mu\delta}{CD},$$

oder $MR : \mu\varrho = CD \,.\, MD \,.\, \mu R : C\delta \,.\, \mu\delta \,.\, M\varrho$,

und da nach § 396 $CD \,.\, MD = C\delta \,.\, \mu\delta$,

so ist $MR : \mu\varrho = \mu R : M\varrho$

$= M\mu + MR : M\mu + \mu\varrho$,

also $MR \,.\, M\mu + MR \,.\, \mu\varrho = \mu\varrho \,.\, M\mu + \mu\varrho \,.\, MR$,

oder $MR \,.\, M\mu = \mu\varrho \,.\, M\mu$;

folgl. $MR = \mu\varrho$.

§ 400. Die Gleich. dieser L. auf eine leichtere und kürzere Art zu erw., verl. man DM und $\delta\mu$ bis F, so ist CF ein Prllgrm., und $\triangle M\mu F$ den übrigen Tr. ähnl. Hier ist nun $CD \,.\, DM = C\delta \,.\, \delta\mu$ (§ 396), oder, die L. CD, $C\delta$ in gleichgültigen Werthen ausgedrückt,

$$(\mu F + \delta\mu) \,.\, DM = (MF + DM)\, \delta\mu,$$

dieses giebt $DM \,.\, \mu F = \delta\mu \,.\, MF$,

$DM \,.\, MF = \delta\mu \,.\, \mu F$. Nun ist aber auch

$\left.\begin{array}{l} MR : M\mu = DM : MF \\ \mu\varrho : M\mu = \delta\mu : \mu F \end{array}\right\}$ wo die beiden letzten Verh. nach der vorh. Prop. einander gl. sind.

Also ist auch $RM : M\mu = \mu\varrho : M\mu$

oder $RM = M\mu\varrho$

Dieser Bew. läßt sich bei seiner Kürze auf eben die Art auch da anwenden, wenn die P. M, $\mu$ in entg. Hypb. liegen; welches bei dem Bew. § 399 nicht so bequem angehet.

Nur wäre alsdann $(\mu F - \mu\delta)\,DM = (MF - DM)\,\delta\mu$, (Fig. 90), aber demnach das übrige alles einerlei und auch hier $RM = \mu\varrho$. Folgl. sind die zwischen beiden Asympt. und der Hypb. liegenden Theile einer gr. L. $RM$, $\varrho\mu$ durchgängig einander gl., die P. $M$, $\mu$ mögen nun in einerlei oder in entg. Schenkeln der Hypb. liegen, und die L. die Axe unter einem rechten oder schiefen W. schneiden.

§ 401. Durch den Asymptotenw. mit einem P. M (Fig. 89) in der Hypb., ist also die Hypb. bestimmt gegeben, denn man findet alle P. derselben, wenn man alle gr. L. $MR\varrho$ zieht und durchgängig $MR = \mu\varrho$ macht. Weil aber die L., durch einerlei M (Fig. 90) oder $\mu$ gezogen, sich mit dem Asympt. leicht schleifen, so kann man auch durch jedes neugefundene M oder $\mu$, Linien ziehen und auf diese Art so viel P. finden als man verlangt.

## Trigonometrische Berechnung des Parameters, der Axen und des Asymptotenwinkels.

§ 402. Aus einem gegebenen Punkt M (Fig. 89) der Hypb. mit dem Asymptotenw., sind die Axen folgendergestalt gegeben:

I. Man ziehe aus M eine Prlle. MD mit $C\varrho$, so sind CD, MD gegebene Coord. auf der Asympt. zu dem P. M. Ferner halbire man den W. $RC\varrho$ durch CP, nehme (§ 395) $CI = \sqrt{(CD \cdot DM)}$, und schneide das gefundene CI auf CR ab, so giebt eine Prlle. IA mit $C\varrho$ auf CP den Durchschn. A als den Scheitelp. der Hypb. (§ 393), und ist also CA die halbe grß. Axe, und AE perpd. auf sie die halbe kl. Axe (§ 385).

II. Durch den Asymptotenw. allein aber, ohne einen

P. M, ist die Hypb. nicht bestimmt gegeben; weil hier kein CD, DM gegeben, und also auch kein CI gefunden werden kann, wodurch sich die Axen, wie zuvor, bestimmen ließen. Aber das Verh. dieser Axen ist gegeben. Es sei $\angle$ CRQ $= 2\varphi$ und $\angle$ RCP $= \varphi$. Nun nehme man ein CA $=$ a nach Gefallen; so ist das zugehörige AE $=$ b mit dem CA in einem rechtwinkligen Tr. CAE, in welchem AE $=$ AC tg. $\varphi$ $=$ a tg. $\varphi = $ b. Nähme man auf CP die halbe gr. Axe $= \alpha$, so wäre $\alpha$ tg. $\varphi$ eben so die dazu gehörige halbe kl. Axe, daß sich also beide Axen durchgängig wie 1 : tg. $\varphi$ verhielten.

III. Subst. man also in die Gleich. $y^2 = \frac{b^2u^2}{a^2} - b^2$ (§ 379) a tg. $\varphi$ anstatt b, so kommt

$$y^2 = u^2 . \text{tg.} \varphi^2 - a^2 \text{tg.} \varphi^2 = (u^2 - a^2) \text{tg.} \varphi^2,$$

eine Gleich. für die Axe 2a; und eben so $y^2 = u^2 . \text{tg.} \varphi^2 - b^2$, eine Gleich. für die Axe 2b, wenn man $\frac{b}{\text{tg.} \varphi}$ anstatt a subst.

IV. Für eine Axe $2\alpha$ wäre $y^2 = (u^2 - \alpha^2) \text{tg.} \varphi^2$. Wäre also $\alpha > a$, so wäre $u^2 - \alpha^2 > u^2 - a^2$; und gehörte also in der Hypb., deren Axe $= 2\alpha$, zu einerlei Absc. u (III) eine kl. Ord. Oder von versch. Hypb., die zwischen einerlei Asympt. beschr. werden, fallen diejenigen, für welche die grß. Axen am größten sind, ganz innerhalb der andern, deren grß. Axen kleiner sind.

V. Da das Verh. der Axen für Hypb. zwischen einerlei Asympt. beständig ist (II), so sind auch die Hypb. insgesammt einander ähnl., wie die Ellp. von gl. Beschaffenheit (§ 316), und bestimmt also der Asymptotenw., wenn nichts weiter gegeben ist, bloß eine Reihe ähnl. Hypb.

VI. Sind aber mit einem P. M auch CD, DM gegeben (I), so ist:

$$\frac{a^2 + b^2}{4} = CD \,.\, DM \text{ (§ 391)},$$

$$b = a \text{ tg.} \varphi \text{ (II)},$$

also $\frac{a^2 + a^2 \text{ tg.} \varphi^2}{4} = a^2 \,.\, \frac{1 + \text{tg.} \varphi^2}{4} = CD \,.\, DM;$

folgl. $a = 2\sqrt{(CD \,.\, DM)} \,.\, \text{Cos.} \varphi.$

Auch ist, den gefundenen Werth von a in $b = a \text{ tg.} \varphi$ (II) anstatt a gesetzt, $b = 2\sqrt{(CD \,.\, DM)} \,.\, \text{Sin.} \varphi.$

VII. Hieraus lassen sich nun die Axen u. der Parm. durch die gegebenen Dinge folgendergestalt bequem berechnen.

VIII. Ex. Der Asymptotenw. $= 2\varphi$ (II) sei $30^\circ$, so ist $\varphi = 15^\circ$. Gesetzt der P. M läge so, daß nach einem gewissen Maaße $CD = 25$, $DM = 4$, so ist $CD \,.\, DM = 100$ $2\sqrt{(CD \,.\, DM)} = 20$. Es ist also

$2a = 40. \text{ Cos. } 15^\circ = 38{,}6368 +$ u.

$2b = 40. \text{ Sin. } 15^\circ = 10{,}3524 +$

der Parm. $p = \frac{2b^2}{a}$ (§ 377) wird so gefunden:

$$\begin{aligned} \lg 4b^2 = 2\lg 2b &= 2{,}0301124 \\ \lg 2a &= 1{,}5870038 \\ \hline \lg p &= 0{,}4431086 \end{aligned}$$
und also $p = 2{,}774 +$

IX. Wären CD, DM gr. Zahlen, oder ihr Prod. keine Qdrzahl, wie (VIII.), so müßte man sich der Logarithmen bedienen

Weil CD, DM Coord. auf der Asymt. sind, so ist $\lg \sqrt{(CD \,.\, DI)} = \lg CI$ d. i. derjenigen L., deren Qdr. die Potenz der Hypb. genannt wird.

X. Aus der Trigon. ist bekannt, daß $\text{tg. } 2\varphi = \frac{2 \text{ tg.} \varphi}{1 - \text{tg.} \varphi^2}$

Nun ist nach (II.) $tg.\ \varphi = \frac{b}{a}$, also $tg.\ 2\varphi = \frac{\frac{2b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$

$$= \frac{2ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{2.\,2a\,.\,2b}{(2a+2b)\,(2a-2b)};$$

$lg\,tg.\,2\varphi = lg\,2 + lg\,2a + lg\,2b + \mathfrak{C}\,lg\,(2a+2b) + \mathfrak{C}\,lg\,(2a-2b) - 10.$

Die Berechnung für $2a = 48{,}99$ u. $2b = 10{,}35$ nach (VIII.) ist folgende: $2a + 2b = 38{,}64$; $2a - 2b = 28{,}29$

$$\begin{aligned} lg.\ 2 &= 0{,}3010300 \\ lg\ 2a &= 1{,}5870371 \\ lg\ 2b &= 1{,}0149403 \\ \mathfrak{C}\,lg\,(2a+2b) &= 8{,}3098925 \\ \mathfrak{C}\,lg\,(2a-2b) &= 8{,}5483670 \\ \hline lg\ tg.\ 2\varphi &= 9{,}7612669 \\ \text{folgl. } 2\varphi &= 29^\circ\ 59' +. \end{aligned}$$

Es fehlt also wenig an 30°, wie der Asymptotenw. (VIII) angesetzt worden, und liegt die Abweichung darinn, daß hier weder 2a noch 2b der Wahrheit ganz gemäß angenommen worden, denn 2a ist 38,64 — u. 2b ist eigentlich 10,36 +. Hätte man lg 2a u. lg. 2b so genommen, wie sie die Rechnung (VIII) gegeben, so würde man der Wahrheit schon näher gekommen sein, aber sie doch noch nicht erreicht haben, weil man hier $\mathfrak{C}$ lg (2a + 2b + 2b) + $\mathfrak{C}$ lg (2a — 2b) nicht ganz genau nehmen kann.

Den Asymtotenw. $2\varphi$ könnte man auch durch $tg.\ \varphi = \frac{b}{a}$, finden, d. h. man sucht den halben Asymtotenw. und verdoppelt ihn.

Dieses giebt $lg\ tg.\ \varphi = lg\ 2b + \mathfrak{C}\ lg.\ 2a = 9{,}4279031$, also $\varphi = 14^\circ\ 59 +$ und $2\varphi = 29^\circ\ 58' +$, und es wäre auch hier $2\varphi$ noch zu klein, so daß der Fehler jetzt inner-

halb 2 Minuten fiele, da er in der vorigen Rechnung nur innerhalb 1 Min. lag; denn man verdoppelt hier den Irrthum des einfachen W. φ durch die Verdoppelung des W., und ist also die vorige Rechnung richtiger und genauer, ob sie gleich etwas weitläuftiger ist. Dieses zeigt, wie brauchbar die analytischen Trigon. Formeln sind, die Ausübung bequem und richtig zu machen.

§. 403. Wenn in einer Hypb. $2a = 2b = p$, d. i., wenn ihre Axen unter sich u. dem Parm. gl. sind, so nennt man sie eine gleichseitige Hyperbel.

§. 404. Weil hier $a = b$, so ist auch $CA = AE$, folgl. der halbe Asymtotenw. einer solchen Hypb. = $\frac{1}{2}$ rechter oder der ganze = Rechten, und heißt daher auch diese Hypb. die rechtwinklige. Ihre Gleich. bekommt man aus den vorhergehenden Hyperbelgleichungen, wenn man die beständigen Grß. in ihnen, weil sie alle gl. durchgängig in einer ausdrückt. So geben die Gleich. $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$; $y^2 = \frac{b^2 u^2}{a^2} - b^2$ die Gleich. für die rechtw. Hyperbel $y^2 = 2ax + x^2$; $y^2 = u^2 - b^2$ u. s. w., und sieht man hieraus, daß der Kr. gegen die gleichs. Hypb. das ist, was die Ellp. gegen die ordinäre Hypb. ist.

§ 405. Die gleichs. Hypb. aus ihrer Gleich. bequem zu constr., zeichne man über der gegebenen Axe $AB = 2a$ einen Kr. AEBD (Fig. 91) und richte AG aus A perpd. auf. Zieht man nun aus dem Mittelp. C die Sec CF und aus F die Perpd. auf AG, und macht FM durchgängig dem EF gl., so liegen die P. M insgesammt in einer gleichs. Hypb. von der gegebenen Axe $AB = 2a$. Denn wenn $AF = PM = y$, $FM = FE = x$, $AB = ED = 2a$, so ist, weil $AF^2 = DF \cdot EF$, $y^2 = (2a + x)x = 2ax + x^2$.

Die Gleich. $y^2 = u^2 - a^2$ zeigt, daß wenn die Ord. möglich sein soll, $u > a$.

Nimmt man (Fig. 91) die Absc. des vorhin um C mit a beschr. Kr. vom Mittelp. an auf CA und nennt sie $\nu$ und die Ord. $z$, so ist $z^2 = a^2 - \nu^2$. Also z möglich, so lange u kl. als a ist, aber für $\nu > a$ ist z unmöglich.

Der Kr. berührt die Hypb. in A. Und so geben beide kr. L. zusammen Etwas, wo jedem u mögl. und unmögl. Ord. gehören, indem u das, im Kreise mögl. Ord. hat, unmögl., wenn man es als Absc. der Hypb. betrachtet, und dem, das in der Hypb. mög. Ord. hat, unmögl., wenn man es als Absc. des Kr. betrachten wollte, die über ihn hinaus reicht.

§ 406. Die bisher abgehandelten L. werden insgemein die Apollonische Parb., Ellp. u. Hypb. genannt, weil Apollonius unter den Alten die Eigensch. derselben am umständlichsten aus einander gesetzt und erw. hat. Man nennt sie auch bisweilen mit dem Cartesius kr. Linien von dem ersten Geschlechte, die also (da die gr. L. hierher nicht mit gerechnet werden kann) mit den L. der zweiten Ordnung einerlei sind, so wie man die L. der dritten Ordnung zu den kr Linien von dem zweiten Geschlechte u. s. w. und überhaupt alle L., deren Gleich. auf einerlei Grad oder Abmessung steigen, zu einerlei Geschlechte zählt. Um aber auch das, was vielen einander verwandten Linien gemein ist, auf einmal übersehen zu können, hat man, außer der Eintheilung in Geschlechter, die L. auch in Familien abgetheilt, und diejenigen, in deren Gleich. die einzelnen Glieder bis auf die Exp. der Dignitäten mit einander überein kommen, zu einer Familie gerechnet. Solchergestalt ist $y^{m+n} = p^m x^n$ die allgem. Gleich. für die Familien unzähliger Geschlechter

der Parabeln; $ay^{m+n} = px^m(2a - x)^n$ die allgem. Gleich. der Familien für alle Ellypsengeschlechter; und eben so $2ay^{m+n} = px^m(2a + x)^n$ für unzählige Hyperbeln, und $y^{m+n} = x^m(2a - x)^n$ für die Kreise von allen Geschlechtern. Nachdem nun m und n bestimmt werden, so ist auch das Geschlecht bestimmt; und pflegt man die L. sehr oft nach der in ihrer Gleich. befindlichen höchsten Potenz mit Beziehung auf ihre Familien zu benennen. So ist z. B. $y^3 = a^2x$ die erste u. $y^3 = ax^2$ die zweite cubische Prb. Eben dieses gilt auch von den Ellypsen und Hyperbeln der höhern Geschlechter, in welchen jedoch die höchste Potenz der Ord. $y^{m+n}$ zu dem gl. hohen Prod. der obigen Fact. $x^m(2a \pm x)^n$ sich durchgängig wie p : 2a, der Parm. zu der Axe verh., wie (§ 288. 369). Die Apollonischen Prb., Ellp. und Hypb. lassen sich, wie im ersten Kap. gezeigt worden, alle aus einem gewöhnl. Kegel schneiden und heißen daher Kegelschnitte. Für die höhern Geschlechter dieser L. gehört ein Kegel, dessen Grdfl. ein Kreis von einem höhern aber gleichnamigen Geschlechte ist.

Siehe Neuntes Kap.

---

# Achtes Kapitel.

## Von den gemeinschaftlichen Eigenschaften der drei Kegeschnitte.

---

In dem vorhergehenden Kap. haben wir zuerst von der Parb., dann von der Ellp. und von der Hypb. gehandelt; in diesem hier wollen wir hauptsächlich die beiden letzten Curven betrachten, und dar-

aus die Eigensch. derjenigen Vrb. ableiten, die von der Natur der einen u. der andern etwas an sich hat, wie wir in der Folge sehen werden.

§ 407. Erkl. In einer Ebene sei eine gr. L. RDT (Fig. 92, 83) die ich Directrix, und ein P. F außerhalb dieser L., den ich Brennpunkt nennen werde. Sucht man eine unendl. Menge P. M, M, M, so daß die Entfernungen MF, MR vom Brennpunkte bis zu der Directrix immerwährend in einem beständigen Verh. seien, so sollen die durch alle die Reihen nach diesen Bedingungen gefundener Punkte gehenden Curven Kegelschnitte genannt werden.

Der Gesichtsp., unter welchem man hier die drei Kegelschn. betrachtet, ist einer viel größeren Allgemeinheit fähig, die bisher wohl nicht beachtet ist; statt den Brennp. F in der Ebene anzunehmen, kann man ihn sich in der Luft denken; und die nach eben den Bedingungen gefundenen P. gehören immer den Kegelschnitten. Ich überlasse dem geübten Leser den Beweis.

§ 408. Nimmt man in dem Verh. MF : MR, MF immer kl. als MR an, so ist die Curve eine Ellipse, die ein Kreis wird, wenn MR gegen MF unendlich groß ist; weil alsdann alle MF unter sich gl. werden.

§ 409. Ist MF immer grß. als MR, so ist die Curve eine Hyperbel.

§ 410. Ist MF immer gl. MR, so ist die Curve eine Parabel, welches mit der von uns in (§ 171) gegebenen Erkl. dieser Curve stimmt.

§ 411. Wir nennen Axe des Schnitts oder der Curve eine gr. L. DF von dem Brennp. F perpd. auf die Directrix. Wir nennen Scheitel der Curve oder Endp. der Axe die P. A und a, wo die Curve MAm diese Axe schneidet.

§ 412. I. Aufg. Aus dem bekannten beständigen Ver-

hältniß, welches zwischen der MF und der MR Statt finden soll, die Scheitel von jedem Kegelschnitte zu finden, oder, welches einerlei, die Länge der Hauptaxe zu bestimmen. (Fig. 92, 93).

Aufl. Aus F zieht man lFL perpd. auf die Axe FD, auf welcher man einen Theil FL nimmt, welcher zu FD in dem gegebenen Verh. ist, zieht nachgehends die unbegrenzte DL und durch den Brennp. F zwei L. FG, fg, die jede mit der Axe einen W. von 45° machen, und die man so weit verl., bis sie DL in zwei P. G, g begegnen, aus welchen man auf die Axe die Perpd. GA, ga fällt und dadurch die verlangten Scheitel A, a erhält. Denn wegen der rechtw. gleichsch. Tr. FAG, Fag ist AF = AG u. aF = ag, und wegen der ähnl. Tr. DFL, DAG, Dag hat man FL : FD = AG oder AF : AD oder = ag oder aF : aD; d. h., die Entf. FA, AD; Fa, aD der gefundenen P. A, a von dem Brennp. und der Directrix sind in einem beständigen Verh.; weil FD, FL durch Constr. in dem nämlichen Verh. stehen.

§ 413. Zus. 1. Da in der Parabel FL = FD (§ 410), so macht LD mit der Axe einen W. von 45 Grad. Mithin ist Fg || DL. Diese Curve kann in A nur einen Scheitel haben. Sieht man ferner zwei prlle. L. als in einer unendlichen Entf. zusammenlaufend an, und hat man überdem nicht mehr Gründe sich das Zusammenlaufen der Prllen. auf der einen Seite eher als auf der andern zu denken, so folgt hieraus, daß die Prb. gleichgültig in dem elliptischen oder in dem hyperbolischen Geschlechte gesetzt werden kann.

§ 414. Zus. 2. Ein Kegelschnitt ist also eine Ellp., eine Hypb. oder eine Prb., je nachdem ihr Scheitel mehr oder weniger oder eben so weit von dem Brennp. als von der Directrix entfernt ist.

§ 415. Zus. 3. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß, wenn von den drei Dingen, der Brennp. F, die Scheitel A, a, und der Directrix zwei gegeben sind, so ist das dritte auch bekannt. Denn 1) man hat so eben gesehen, wie die Kenntniß des Brennps. und der Directrix die Scheitel geben. 2) Hat man die Directrix und die Scheitel A, a nebst dem immer als bekannt angenommenen Verh., welches zwischen der MF und MR herrschen soll; zieht durch A AG, die zu AD in diesem beständigen Verh. steht; zieht nachgehends DGL und GF an AG unter einem W. von 45 Grad, so ist F der Brennp. 3) Hat man die Scheitel A, a und den Brennp. F, so errichtet man auf der Axe die Prpd. AG = AF und ag = aF. Durch die Endp. G, g dieser L. zieht man gG, welche die Axe in D trifft; dieser P. D ist ein P. in der Directrix.

§. 416. Zus. 4. Aus dem Verh. folgt noch, daß man in der Ellp. und in der Hypb. immer zwei Brennp F, f und zwei Directrix DR, dr finden kann; denn es giebt nicht mehr Gründe AF, nach dem Scheitel A zu, als af = AF nach dem Endp. a hin der nämlichen Axe zu nehmen; es ist also gleichgültig, eins oder das andere zu nehmen; aber der Brennp. F constr. die Directrix DR, indem man AD zu AF in dem gegebenen Verh. nimmt, welches das Verh. der Entf. eines P. M der Curve vom Brennp. und von der Directrix ausdrückt; man könnte also auch eine neue Directrix dr in Betreff des Scheitels a finden, indem man auf der nöthigenfalls verlängerten Axe ad zu af in demselben Verh. nimmt.

§ 417. II. Aufg. Wenn man die große Axe aA eines Kegelschnittes nebst dem Verhältniß kennt, welches zwischen der MF und MR herrschen soll: den Ausdruck für

die

die Entfernung AF des Brennpunktes F vom Scheitel A zu finden. (Fig. 92.)

Aufl. Es sei die grß. Axe Aa = 2a, und das Verh. der MF zu den MR sei bezeichnet durch m : n. Endlich sei AF = $\alpha$; so ist aF = 2a — x. Da nun A einer von den P. der Curve ist, so hat man

$$m : n = AF : AD; \text{ also } AD = \frac{n}{m} \cdot AF = \frac{n}{m} x,$$

$$\text{Folgl. } AD = 2a + \frac{nx}{m},$$

und da auch der Scheitel a ein P. der Curve ist, so hat man abermals $m : n = aF : aD$,

$$\text{oder } m : n = 2a - x : 2a + \frac{nx}{m}.$$

$$\text{Folgl. } x : \frac{nx}{m} = 2a - x : 2a + \frac{nx}{m};$$

$$\text{Woraus } x = \frac{n - m}{n} a.$$

§ 418. Zus. Nimmt man m kl. als n an, wie dieses in der Ellp. geschieht, so ist der Werth von x pos. Ist im Gegentheil m grß. als n, wie in der Hypb., so wird x neg.; und in diesem Falle muß man AF auf der verl. Axe über den Scheitel A hinaus nehmen. Endlich, wenn man m = n annimmt, so verw. sich $\frac{n - m}{n}$ a in $\frac{o}{n}$. a oder n = 1 gesetzt $\frac{o}{1}$. a. In diesem Falle ist die Curve eine Parb., u. a ist unendlich. Ueberdem $\frac{o}{1} = o = \frac{1}{\infty}$;

$$\text{folgl. } x = \frac{1}{\infty} . \infty = 1.$$

d. h. die Entf. kann immer gl. der Einh. genommen werden.

§ 419. III. Aufg. Alles Vorhergehende vorausgesetzt, soll man nach einer gleichförmigen Methode die drei Kegel-

schnitte construiren; oder, welches gleich viel, man soll so viel Punkte M, M, m, m finden, als man will. (Fig. 92 und 93).

Aufl. Durch so viel P. P, P in der Axe AP als man will, errichtet man auf dieser Axe Perpd., die unbegrenzt nach l verl. sind und in der gr. L. DGL sich endigen; nachgehends beschr. man aus F als Mittelp. mit einem Halbm., gleich jedem PL, einen Kr., der jede lPL in zwei P. M, n schneidet, die in dem verl. Kegelschn. liegen werden. Um es zu bew. sei MR auf die Directrix DT perpd.; so wird man haben MR = PD und durch Constr. MF = PL; mithin MR : MF = PD : PL; und PD : PL = AD : AG wegen der ähnl. Tr. LPD, GAD; d. h. die Entf. MR und MF von der Directrix und vom Brennp. sind für jeden Kegelschn. in constanten Verh., weil AD, AG oder PD und PL in diesem Verh. durch Constr. sind (§ 412).

§ 420. Zus. 1. Weil die L. PL, PL oder die corresp. FM, FM, die ihnen gl. sind, wie die Elemente des Tr. gaD wachsen, so folgt hieraus, daß sie in arithm. Progression sind; und folgl. muß ihre Summe in gl. Entf. von den Scheiteln A, a eine beständige Grß. haben und immer gl. AG + ag sein, welche den Endp. der Axe Aa entspricht und durch Constr. ihr gl. ist (§ 410). In der Ellp. wird diese Summe immer eine wahre Summe sein, weil die L. PL, PL sich immer in Betreff der Axe auf einerlei Seiten befinden. In der Hyperbel hingegen (Fig. 93) wird die Summe der zwei PL in gl. Entf. von den Scheiteln A, a genommen und in einerlei gr. L. GL sich endigend eine wahre Differenz sein; denn da diese Linien sich auf versch. Seiten der Axe Aa befinden, so ist die eine von ihnen pos. und die andere negativ.

§ 421. Zus. 2. Bemerkt man, daß in der Ellp. und

in der Hypb. jeder P. M vermittelst der Directrix DR u. des Brennp. F auch durch die Directrix dr und den Brennp. f bestimmt werden kann, so sieht man, daß in der Ellp. die Summe der Entf. MF, Mf und in der Hypb. die nämlichen L. immer gl. der ersten Axe Aa sind. Denn da der P. M durch den Brennp. F und der Directrix DR bestimmt worden, so hat man $MF = PL$; und da er eben so durch den Brennp. f der Directrix dr hat bestimmt werden können, so hat man auch $Mf = Pl$; folgl. hat man für die Ellp. und für die Hyperb. $Mf \pm MF = Pl \pm PL = Ll$ oder $GE = Aa$, weil $AG = AF$ und $AE = aF$.

§ 422. Zus. 3. Diese beiden Eigensch. finden sich in der Parb., d. h., wenn man in dieser Curve zwei Brennp. in unendl. Entf. von einander annimmt, beide innerhalb dieser Curve, wie in der Ellp., oder einer innerhalb und der andere außerhalb, wie in der Hypb., so wird im ersten Falle die Summe der Entf. MF, Mf, und im zweiten ihre Diff., immer gl., dieser unendl. Axe sein.

§ 423. IV. Aufg. Aus der bekannten großen Axe $Aa = 2a$, der Ellipse, der Hyperbel und der Entfernung AF des Scheitels A vom Brennpunkte $= c$ die Entfernung AD des Anfangspunktes D in der Directrix vom Scheitel A zu finden. (Fig. 92 und 93).

Aufl. Es sei $AD = x$, so ist $aD = 2a \pm x$ (das obere Zeichen ist immer für die Ellp. und das untere für die Hypb.)

$AF = AG$ (§ 412) $= c$; und aF oder $ag = 2a \mp c$; nun haben wir wegen der ähnl. Tr. DAG, Dag

$AG : AD = ag : aD$ oder $c : x = 2a \mp c : 2a \pm x$;

woraus leicht gefunden wird $x = \dfrac{ac}{a \mp c}$. Da in der Parb.

$a = \infty$, so ist $a \mp c = \infty$; folgl. $x = \frac{ac}{a} = c$, wie es sein muß.

§ 424. V. Aufg. Die Gleichung der Kegelschnitte zu finden, wenn die Absc. $AP = x$ vom Scheitel A aus genommen werden. (Fig. 92 und 93).

Aufl. Die ähnl. Tr. DAG, DPL geben $AD : AG = DP : PL$ und analytisch $\frac{ac}{a \mp c} : c = \frac{ac}{a \mp c} + x : PL = \frac{ac + ax \mp cx}{a}$. Uebrigens in allen Fällen $PF = \mp x \pm c$ für die Ellp. und für die Hypb. Mithin, da der Tr. FPM rechtw. und $FM = PL$, so hat man $PM^2 = FM^2 - FP^2$, oder

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} \mp \frac{2c^2x}{a} \mp \frac{2cx^2}{a} + 4cx = \frac{c^2x^2 \mp 2ac^2x \mp 2acx^2 + 4a^2cx}{a^2}$$

$= \frac{(2ax \mp x^2)(2ac \mp c^2)}{a^2}$; und macht man das bekannte Rect. $2ac \mp c^2 = b^2$, so ist $y^2 = (2ax \mp x^2) \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

Wenn man in der Gleichung für $y^2$, a unendlich grß. annimmt, so verschw. alle Gl., und es bleibt nur $4cx$; folgl. ist die Gleich. der Parb. $y^2 = 4cx$; oder $4c = 2p$ gesetzt, $y^2 = 2px$.

Anmerk. Der ganze Parm. der Axe von der Parb., den man bisher mit p bezeichnet hat, wird es in der Folge mit $2p$ sein, um die Analogie diese Curve mit den beiden andern zu behalten, in welchen p nur der Parm. der halben Axe Aa ist. Die Gleichung $y^2 = px$ wird nun $y^2 = 2px$, und eben so verwandelt sich $px + \frac{1}{4}p^2$ in $2px + p^2$.

§ 425. Zus. 1. Es folgt hieraus, daß man in der Ell. und in der Hypb. diese Prop. hat: $y^2 : 2ax \mp x^2 = b^2 : a^2$;

folgl. verh. sich die Qdr. der Ord. unter sich wie die Prd. aus den corresp. Absc.; denn $AP \cdot aP = 2ax \mp x^2$; und überdem ist das Verh. $b^2 : a^2$ welches das Verh. des Qdrts. einer Ord. zum Rect. $aP \cdot AP$, ein constantes Verh. In der Parb. verhalten sich die Qdr. der Ord. unter sich wie die Absc. Dieses ist eine nothw. Folge der Gleich. $y^2 = 2px$.

§ 426. Zus. 2. Wir haben in den vorhergehenden Kap. gesehen, daß eine dritte Proportionale zu den beiden halben Axen der Parm. von derjenigen Axe ist, die im ersten Gl. der Prop. steht. Es sei also p der Parm. von der halben ersten Axe, so hat man $a : b = b : p$, woraus $b^2 : a^2 = p : a$; also wegen der Prop. $y^2 : 2ax \mp x^2 = b^2 : a^2$ wird man haben $y^2 : 2ax \mp x^2 = p : a$, und folgl. $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$. Der Bruch $\frac{px}{a}$ giebt $a : p = x : \frac{px}{a}$; das Rect. $ap$ aus den beiden ersten Gl. dieser Prop. ist also ähnl. dem Rect. $\frac{px^2}{a}$ aus den beiden letzten Gl., weil die Seiten proportional sind. Folglich: In einem bel. Kegelschn. ist das Qdr. von einer Ord. auf der Hauptaxe in Bezug auf das Prod. $2px$ aus der Absc. und dem ganzen Parm. dieser Axe gl. in der Prb., kl. in der Ellp. und grß. in der Hypb.; und überdem in den beiden letzten Curven ist der durch $\frac{px^2}{a}$ bezeichnete Mangel oder Ueberschuß ein dem Rect. $ap$ aus der halben Hauptaxe und ihren Parm. ähnl. Rect., dessen Seiten $x$ und $\frac{px}{a}$ sind. Dieser Eigensch. wegen haben die Alten den drei Kegelschn. die Namen Parb., Ellp. und Hypb. gegeben; die, respective, Gleichheit, Mangel u. Ueber=

schuß bezeichnen. Das hier Gesagte findet auch seine Anwendung bei den Diametern, welche dieselbe Gleich. als die Hauptaxe haben.

§ 427. Zus. 3. Nimmt man $x = c$ oder $= 2a \mp c$ an, so hat man $y^2 : 2ac \mp c^2 = b^2 : a^2$; man hat aber angenommen: $2ac \mp c^2 = b^2$; mithin wird man haben $y^2 : b^2 = b^2 : a^2$, woraus $y = \frac{b^2}{a} = p$; folgl. in jedem Kegelschn. ist die durch einen oder den andern Brennp. gehende doppelte Ord. gl. dem Parm. der Hauptaxe; wie wir es bei jeder einzelnen gesehen haben. Macht man $x = \pm a$, so hat man $y^2 : \pm a^2 = b^2 : a^2$, und $y^2 = \pm b^2$. Woraus folgt, daß das Qdrt. der durch den Mittelpunkt gehenden Ord. CB gl. ist dem Qdr. $\pm b^2$. Dieses Qdrt. ist pos. in der Ellp. und giebt zwei reelle Werthe für y in dieser Curve; in der Hypb. hingegen ist dasselbe Qdrt. neg., und giebt für y zwei imaginaire Werthe $\pm \sqrt{(-b^2)} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{(-1)}$; weil die Curve (Fig. 93.) mAM, maM keine reelle Ord. für alle zwischen den Endp. der Axe Aa genommenen Absc. haben kann.

§ 428. Zus. 4. Nimmt man die zwei Axen der Ellp. und der Hypb. einander gl. an, welches im ersten Falle einen Kr. und im zweiten eine gleichseitige Hypb. geben wird, so wird der Parm. auch der einen oder der andern Axe gl. sein, und die Gleich. $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$ wird $y^2 = 2px \mp x^2$, welches die Gleich. eines Kr. oder einer gleichs. Hypb. ist; wenn man nur, wie hier geschiehet, annimmt, daß die Ord. rechtw. sind, um einen Kr. zu haben.

§ 429. Zus. 5. Wenn man in $y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} \mp \frac{2c^2x}{a} \mp \frac{2cx^2}{a} + 4cx$ annimmt $x = c$, so findet man $y^2 =$

$\frac{c^4}{a^2} \mp \frac{4c^3}{a} + 4c^2$, folgl. $y = \frac{c^2}{a} \mp 2c$; wir haben aber (§ 427.) gesehen, daß die durch den Brennp. F gehende doppelte Ord., wie hier geschieht, gl. dem Parm. ist; folgl. ist der allg. Ausdr. des Parm. der Hauptaxe eines Kegelschn. $2p = \frac{2c^2}{a} \pm 4c$. In der Prb. wegen $a = \infty$ ist der Parm. $2p = 4c$.

§. 430. Anmerk. Da wir in dem vorhergehenden Kap. gezeigt haben, daß die Eigenschaften der conjugirten Diam. ganz genau dieselben als die für die Axen sind, so wollen wir uns hier nicht aufhalten, zu bew., daß ihre Gleichung auch die nämliche sein muß, wenn man die Absc. vom Anfgsp. eines jeden Diam. annimmt.

§ 431. VI. Aufg. An irgend einem Kegelschnitt in einen Punkt M eine Tangente MT gedacht; den Ausdruck der Subtangente PT zu finden, wenn man die Abscisse vom Scheitel A an rechnet. (Fig. 73, 82.)

Aufl. Wir haben in den vorh. Kap. (§ 250, 343) von der Ellp. und Hypb. gesehen, daß man CP : CA = CA : CT hat; setzt man also die annalyt. Werthe, so findet man: $a \mp x : a = a : \frac{a^2}{a \mp x} = CT$; zieht man also in der Ellp. CP von CT ab, oder in der Hypb. CT von CP, so hat man $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$.

§ 432. Zus. 1. Kennt man die algbr. Ausdr. der L. PM und PT, so ist es leicht, die Ausdr. für die Subn. PR und von der Norm. MR zu finden; so wie auch die von der tg. MT in der L. AR, aR, AT, aT; indem man sich, wie vorher, der rechtw. Tr. TPM, MPR, RMT bedient;

man wird also finden $PR = \frac{b^2}{a^2}(a \mp x)$, oder $PR = \frac{p}{a}(a \mp x) = p \mp \frac{px}{a}$. In einem jedem Kegelschn. ist also die Subn. PR in Bezug auf ihren halben Parm. von der Hauptaxe kl. in der Ellp., grß. in der Hypb. und gl. in der Parabel. Denn wegen $a = \infty$ in dieser Curve ist $\frac{-px}{a} = \mp 0$. Eben so findet man

$$MR = \frac{1}{a^2}\sqrt{[a^2b^4 \mp 2ab^4x + b^4x^2 + 2ab^2x \mp a^2b^2x^2]};$$

oder $MR = \frac{1}{a}\sqrt{[a^2p^2 \mp 2ap^2x + p^2x^2 + 2a^2px \mp apx^2]}$; woraus $MR = \sqrt{(2px + p^2)}$ in der Parb., wenn man $a = \infty$ macht.

Der rechtw. $\triangle MPT$ giebt $MT = \sqrt{(MP^2 + PT^2)}$ $\sqrt{(2ax \mp x^2)} \cdot \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2ax \mp x^2}{(a \mp x)^2}\right)}$. Addirt man $AP = x$ zu $PR = \frac{b^2}{a^2}(a \mp x)$, so findet man $AR = \frac{b^2a \mp b^2x + a^2x}{a^2}$, oder $AR = p + x \mp \frac{px}{a}$; folgl. ist AR in Bezug auf die Summe des halben Parm. der Hauptaxe u. der Absc. x kl. in der Ellp., grß. in der Hypb. u. gl. in der Parb., weil $\mp \frac{px}{a} = 0$. Eben so würde man finden $aR = \frac{2a^3 \mp a^2x \mp ab^2 + b^2x}{a^2}$ oder $= 2a \mp x \mp p + \frac{px}{a}$, welches in der Parb. eine unendl. Grß. ist.

Endlich, wenn man $AP = x$ von $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$ subtrahirt, so ergiebt sich $AT = \frac{ax}{a \mp x}$, welche in der Parb. $AT = x$ giebt. Es ist ferner sichtbar, daß diese L. in der

Ellp. unendlich wird, wenn $x = a$ und gleich $a$ in der Hypb. für $x = \infty$ wird. Eben so fände man $aT = \frac{2a \mp x}{a \mp x} . a$, welche in der Parb. unendlich ist.

§ 433. Zus. 2. Zieht man PF von $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$ ab, wenn P in der Ellp. zwischen C, F fällt, oder addirt PF zu derselben L., wenn P zwischen den Scheitel A und den Brennp. F fällt, so hat man $FT = \frac{ax + ac \mp cx}{a \mp x}$; und eben so, wenn man $PT = \frac{2ax - x^2}{a - x}$ zu $fP = 2a - x - c$ (Fig. 73) addirt, oder wenn man $PT = \frac{2ax + x^2}{a + x}$ von $fP = 2a + x + c$ (Fig. 82) abzieht, so hat man $fT = \frac{2a^2 \mp ax \mp ac + cx}{a \mp x}$; wir haben aber (§ 424) gefunden $FM = \frac{ac + ax \mp cx}{a}$, u. folgl. $fM = \frac{2a^2 \mp ac \mp ax + cx}{a}$;

folgl. $FM : FT = \frac{ac + ax \mp cx}{a} : \frac{ac + ax \mp cx}{a \mp x} = a \mp x : a$
$= CP : CA$. Folgl. auch

$$MF : fT = \frac{2a^2 \mp ac \mp ax + cx}{a} : \frac{2a^2 \mp ac \mp ax + cx}{a \mp x}$$
$$= a \mp x : a = CP : CA.$$

§ 434. Zus. 3. Aus den so eben gefundenen zwei Prop. zieht man eine neue allen drei Kegelschn. gemeinsch. Art, mittelst einer der Brennp. an einen bel. P. M eine Tang. zu ziehen. Es bedarf dazu nur folgender Prop. $CP : CA = FM : FT$ oder $= fM : fT$, deren erste drei Gl. bekannt sind; nachdem der P. T bestimmt worden, so zieht man MT, welches die verl. Tang. sein wird. Nimmt man die

halbe Axe AC = $\infty$ an, so ist einleuchtend, daß in der Prop. FM : FT = $a \mp x : a$ die beiden Gl. $a \mp x$ und $a$ einander gl. werden; folgl. auch FM = FT, wie es übrigens aus der Natur der Parb. bekannt ist.

§ 435. I. Lehrs. Fällt man aus den Brennpunkten F, f auf eine beliebige Tangente Perpendikel FE, fe, so hat man FE . fe = $CB^2$. (Fig. 73, 82).

Bew. Die ähnl. Tr. MPT, FET, feT werden geben

$$MT : MP = FT : FE = fT : fe; \text{ also } FE = \frac{MP}{MT} . FT,$$

$$\text{und } fe = \frac{MP}{MT} . fT; \text{ folgl. } FE . fe = \frac{MP^2}{MT^2} . \pm(CT^2 \mp CF^2).$$

Denn FT = $\pm$ CT $\mp$ CF und fT = CT + CF; man hat aber (§ 432) bereits gefunden $MT^2 = (2ax \mp x^2)\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2ax \mp x^2}{(a \mp x)^2}\right)$, und in allen Fällen $MP^2 = (2ax \mp x^2)\frac{b^2}{a^2}$; mith. reduc. hat man $\frac{MP^2}{MT^2} = \frac{b^2 (a \mp x)^2}{a^2 b^2 \mp 2ab^2x + b^2x^2 + 2a^3x \mp a^2x^2}$, diese letzte Gleich. multpl. mit $\pm CT^2 \mp CF^2 = \frac{\pm a^4}{(a \mp x)^2} \mp c^2$ oder mit $\frac{a^2b^2 \mp 2ab^2x + b^2x^2 + 2a^3x \mp a^2x^2}{(a \mp x)^2}$; wenn man $a^2 \mp b^2$ statt $c^2$ setzt und bringts auf einerlei Benennung, so wird man augenscheinlich sehen, daß FE . fe = $b^2$.

§ 436. Lehns. Wenn man zwei veränderliche Größen u, v hat, so daß, wenn die eine u + w wird, die andere in demselben Augenblick $u \mp w$ wird (w ist der Anwachs der veränderlichen u u. v), so ist $\frac{u}{v} : \frac{u+w}{v \mp w} \lessgtr u : u + w$.

Bew. Es muß gezeigt werden, daß im ersten Falle das Prod. der äußern Gl. kl. als das Prod. der mittlern

ist, und grß. im zweiten Falle, welches sehr einleuchtend ist, da Brüche, $\frac{a^2 + ac}{b}$, $\frac{a^2 + ac}{b \mp c}$, die gl. Zähler haben, in umgekehrtem Verh. ihrer Nenner b und $b \mp c$ sind, d. h. wie $b \mp c : b$.

§ 437. II. Lehrs. Wenn man in einem Kegelschnitt aus dem Brennpunkt F nach verschiedenen Punkten M, m gerade Linien FM, Fm zieht, die wir Vektoren nennen wollen, und FE, Fε perpendikular auf die Tangente in M und m, so wachsen in der Ellipse die Quadratwurzeln aus den Vectoren weniger in Bezug auf einander als die correspondirenden Perpendikel der correspondirenden Vectoren, daß sie in der Hyperbel mehr, und in der Parabel eben so viel wachsen. (Fig. 73, 82).

Bew. Die ähnl. Tr. FME, fMe geben $FM : FE = fM : fe$; mithin $FE = \frac{FM \cdot fe}{fM}$; also $FE^2 = fe \cdot FE \cdot \frac{FM}{fM} = BC^2 \cdot \frac{FM}{fM}$, (§ 435). Man denke sich noch einen andern P. m mit seinem Vector Fm, seine Tang. und ein Prpd. Fε auf dieser Tang.: so wird man wie so eben für FF geschehen, bew., daß $F\varepsilon^2 = BC^2 \cdot \frac{Em}{fm}$; folgl. $FE^2 : F\varepsilon^2$ $BC^2 \cdot \frac{FM}{fM} : BC^2 \cdot \frac{Fm}{fm} = \frac{FM}{fM} : \frac{Fm}{fm}$; aber in der Ellipse, wenn FM zunimmt, nimmt fM ab; und in der Hypb. nehmen FM, fM zu; mithin ist nach dem vorherg. Lehnsatz $\frac{FM}{fM} : \frac{Fm}{fm} \lessgtr FM : Fm$; folgl. auch $FE^2 : F\varepsilon^2 \lessgtr FM : Fm$, und die Wurzeln ausgezogen $FE : F\varepsilon \lessgtr \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$; d. h. das erste Verh. ist in der Ellp. kl. als das zweite u. in der Hypb. grß., folgl. enthält $\sqrt{FM}$ mehr mal $\sqrt{Fm}$,

als FE mal $F\varepsilon$ enthält; in der Ellp. ist also $\sqrt{Fm}$ weniger grß. in Bezug auf FE und umgekehrt in der Hypb.

In der Parb. ist dieses Verh. das der Gleichheit; denn man hat $FA : FE = FE : FT$ oder FM, also $FA \cdot FM = FE^2$, und denkt man sich eine andere Fm mit $F\varepsilon$ corresp., so hat man $F\varepsilon^2 = FA \cdot Fm$; mith. $FE^2 : F\varepsilon^2 = FA \cdot FM : FA \cdot Fm = FM : Fm$, und zieht man die Quadratwurzeln, $FE : F\varepsilon = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$.

§ 438. Erkl. Denkt man sich durch drei in dem Perimeter irgend eines Kegelschnittes unendlich nahe liegende P. einen Kr. gelegt, so wird dieser Kr. der **Krümmungskreis** (**Berührungskreis**) und dessen Halbmesser der **Krümmungshalbmesser** genannt; weil die Krümmung dieses Kr. gl. ist der Krümmung des Kegelschn. an den mit dem Kr. gemeinsch. Punkten.

§ 439. VII. Aufg. Den Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Kegelschnitt zu finden. (Fig. 94, 95).

### Auflösung für die Ellipse und Hyperbel.

Es seien CM, CL zwei congugirte Diam., und durch den Endp. M des ersten sei auf den zweiten die Norm. MRK gefällt. Es sei ferner NOn prll der Tang. in M dem P. M unendlich nahe in $\pi$ durch die Norm. MR geschnitten, und in O halbirt. Endlich sei durch O ein Prpd. mO auf Nn gezogen, welcher die Curve in m trift; es ist sichtbar, daß der Mittelp. des Krümmungskr. in dieser L. liegen muß. Es sei $2z$ der unbekannte Halbm. dieses Kr., t die Absc. mO, und MO die auf dem Diam. CM genommene Absc. Wegen des durch die drei P. N, m, n gehenden Kr. hat man $NO^2 = (2z - t) \cdot t$; und weil dieselben P. der Ellp. gehören, so hat man $NO^2 = (2CM \mp u)\, u \cdot \frac{CL^2}{CM^2}$; folgl.

$(2z - t).t = (2CM \mp u)u \frac{CL^2}{CM^2}$; wenn aber m mit M zusammenfällt, so hat man $mO = M\pi$, und dies Verh. $mO : MO$, d. h. von $t : u$ ist das nämliche als $M\pi : MO$, oder als $MK : MC$ wegen der ähnl. Tr. $M\pi O$, $MKC$; folgl. $MK : CM = t : u = \frac{t \cdot CM}{MK}$; diese Werthe von u in die eben gefundene Gleich. gesetzt und mit t dividirt, giebt $2z - t = \left(2CM \mp \frac{CM \cdot t}{MK}\right) \cdot \frac{CM}{MK} \cdot \frac{CL^2}{CM^2}$; da aber t mit z u. CM verglichen unendlich kl., so wird die erste Hälfte der Gleich. 2z und die zweite Hälfte $2CM \cdot \frac{CM}{MK} \cdot \frac{CL^2}{CM^2}$; folgl. $2z = \frac{2CL^2}{MK}$ oder $z = \frac{CL^2}{MK}$.

### Auflösung für die Parabel. (Fig. 69).

§ 440. Dieselben Benennungen als in den beiden vorherg. Fig.; es sei $\pi$ der Parm. des Diam. MQ, der durch den P. M geht. So wird man wegen des Krümmungskr. Mmn haben $(2z - t).t = ON^2$ und wegen der Parb. $\pi u = NO^2$; mithin $(2z - t)t = \pi u$; wenn der P. m unendlich nahe dem P. M ist, so ist das Verh. $mO : MO$ das nämliche als $PR : MR$; folgl. $MR : PR = u : t$; demnach $u = \frac{MR \cdot t}{PR}$; diesen Werth von u in der vorherg. Gleich. gesetzt und mit t dividirt, so hat man $2z - t$ oder $2z = \frac{\pi \cdot MR}{PR}$.

§ 441 Um den algebr. Ausdruck für den Krümmungshalbm. zu haben, so bemerkt man sogleich, daß $CL \cdot MK = a \cdot b$ (§ 282, 366) giebt $MK = \frac{a \cdot b}{CL}$; also z oder $\frac{CL^2}{MK}$

$= \frac{CL^3}{a.b}$. Ferner weiß man (§ 277), daß $CM^2 + CL^2 = a^2 + b^2$; und man wird eben so in der Hypb. bew., daß der Unterschied $CM^2 - CL^2$ der Qdr. der beiden halben conj. Diam gl. dem der Qdr. der halben Axen; man wird also immer haben $CM^2 \pm CL^2 = a^2 \pm b^2$.

Mithin $CL^2 = \pm a^2 + b^2 \mp CM^2$; wegen des rechtw. Tr. CPM haben wir

$$CM^2 = CP^2 + MP^2 = a^2 \mp 2ax + x^2 + (2ax \mp x^2)\frac{b^2}{a^2},$$

woraus sich leicht ergiebt

$$CL = \frac{1}{a}\sqrt{[a^2b^2 + 2a^3x \mp a^2x^2 \mp 2ab^2x + b^2x^2]};\ \text{folgl.}$$

$z$ oder $\frac{CL^3}{a.b} = \frac{1}{a^3.ab}.[\sqrt{(a^2b^2 + 2a^3x \mp a^2x \mp 2ab^2x + b^2x^2)}]^3$,

oder ap für $b^2$ gesetzt, so hat man

$$z = \frac{1}{a^3.a\sqrt{(ap)}}.[\sqrt{(a^3p + 2a^3x \mp a^2x^2 \mp 2a^2px + apx^2)}]^3,$$

die sich für $x = 0$ in allen Kegelschn. auf p reducirt; woraus folgt, daß in jedem Kegelschn. der Krümmungsh. am Scheitel gl. dem halben Parm. der Axe ist. Nimmt man die Absc. aus dem Mittelpunkt C, so findet man $CL = \frac{1}{a}\sqrt{(\pm a^4 \mp a^2x^2 + apx^2)}$, folgl. $\frac{CL^3}{a.b}$ oder $\frac{CL^3}{a\sqrt{(ap)}}$ oder $z = [\sqrt{(\pm a^4 \mp a^2x^2 + apx^2)}]^3$.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit

$$\frac{1}{a^3p^2}.[\sqrt{(\pm a^3p \mp apx^2 + p^2x^2)}]^3,$$

welches der Cubus von der Norm MR dividirt durch das Qdr. des halben Parm. p der Axe ist, so wird man zur Stelle die Gleichheit finden; man hat folgl. in jedem Ke-

gelschn. $z = \frac{MR^3}{p^2}$; d. h., der Krümmungsh. für irgend einen P. ist gl. dem Cubus von der Norm., dividirt durch das Quadr. des halben Parm. der Hauptaxe für alle Kegelschn.; der Ausdr. für den Krümmungsh. der Parb. ist also $z = \frac{(\frac{1}{4}p^2 + px)\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + px)}}{\frac{1}{4}p^2}$, wenn der ganze Parm. = p ist.

§ 442. VIII. Aufg. Aus den gegebenen Asymptoten CB, CF einer Hyperbel und einem gegebenen Punkt A in dieser Curve so viel Punkte dieser Curve als man will zu finden (Fig. 97.).

Aufl. In den Asymptotenw. ziehe man durch den P. A bel. L. BAab, DAGd, die sich in denselben Asympt. endigen. Auf diesen L. nimmt man die Theile ab = AB, Gd = AD, und alle auf diese Art gefundenen P. werden Punkte in der geforderten Hypb. sein. Jeder von diesen P., wie G, könnte dienen, auf die nämliche Art mehrere dergl. P. zu finden, wenn man gr. L. wie FGgf zieht, auf welchen man gf = GF nimmt. Diese Aufl. ist eine evidente Folge von dem, was man vorher (§ 353.) bew. hat.

§ 443 IX. Aufg. Wenn der Brennpunkt F eines beliebigen Kegelschnittes und drei Punkte M, N, P der Curve gegeben sind, die Curve zu zeichnen. (Fig. 98).

Aufl. Es ist einleuchtend, daß alles darauf ankömmt die Directrix der Curve zu finden, oder, welches einerlei, zwei P. dieser Directrix. Um dazu zu gelangen, nehme ich für einen Augenblick die Aufg. als gelöst an; d. h., daß die durch den Brennp. F gezogene L. BF die Axe der Curve sei; und daß EL prd. auf dieser Axe die Directrix sei. Aus den gegebenen P. M, N, P ziehe ich zum Brennp. F alle bekannten MF, NF, PF und auf die Directrix die

Prpd. MC, ND, PE; ich ziehe auch PNG, NML bis zur Directrix, deren Theile PN, MN bekannt sind; endlich aus F als Mittelp. mit den Halbm. MF, NF beschr. ich Kreisbog. MH, NK bis zu den L. FN, FP, um NH = FN — FM und PK = FP — FN zu haben. Nun weiß man, daß die Entf. FP, FN, FM der gegebenen P. P, N, M vom Brennp. und die Entf. PE, ND, MC der nämlichen P. von der Directrix immer in einem constenten Verh. sein sollen; man wird also haben FP : FN = PE : ND u. wegen der ähnl. Tr. PEG, NDG, PE : ND = GP : GN; mithin FP : FN = GP : GN. Daher FP — FN oder PK : FN = GP — GN oder PN : GN; folgl. $GN = \frac{PN \cdot FN}{PK}$; eben so findet man $ML = \frac{MN \cdot FM}{NH}$; übrigens sind diese beiden Ausdr. der L. GN und ML gänzlich bekannt; man hat folgl. zwei P. von der Directrix, und die Aufg. ist gelöst.

§ 444. X. Aufg. Aus dem gegebenen Mittelpunkt C von einer Ellipse oder von einer Hyperbel und zwei der Lage nach gegebenen Tangenten TM, TN an dieser Curve und der bloß der Größe nach gegebenen ersten Axe Aa die Curve zu zeichnen. (Fig. 99.)

Aufl. Aus dem gegebenen P. C als Mittelp. beschr. man mit dem Halbm. CA = der halben grß. Axe einen Kr., welcher die Tg. TM, TN in zwei P. E, D schneiden wird; aus demselben P. errichtet man auf der Tg. die Prpd. EF, DF, die sich in einem P. F schneiden werden, der der Brennp. der zu zeichnenden Curve sein wird. Nachdem vermittelst des so eben gefundenen Brennp. die Lage der grß. Axe bestimmt ist, so vollendet man die Constr. wie gewöhnlich. Diese Aufl. ist eine nothw. Folge von dem, was wir (§ 243) bew.

bew. haben, daß die halbe grß. Axe CA gl. der aus dem Mittelp. bis zum P. E der Tg. gezogenen L., an welche ein Prpd. aus dem Brennp. F anstößt. Welches sich eben so in der Hypb. bew. läßt.

---

## Neuntes Kapitel.

Kurze Begriffe über die Kegelschnitte der höhern Ordnungen; nützliche algebraische Reihen; Gebrauch dieser Reihen, um die Quadratur der gewöhnlichen Kegelschnitte zu finden; Anwendung dieser Reihen auf die hyperbolische Logarithmen; die Art, sie zu berechnen, an einem Beispiel. Betrachtung über den unendlichen hyperbolischen Raum; man leitet daraus einen Beweis von zwei Eigenschaften dieser Curve ab, die widersprechend scheinen, und es wird die Uebereinstimmung dieser zwei Wahrheiten gezeigt.

---

Als man angefangen hatte, die Eigensch. der Kegelschn. durch die Analysis aufzusuchen, war es nicht leicht mehr möglich, sich auf die in den vorherg. Kapiteln stehenden Gleich. zu beschränken. Um den Anfängern einen Begriff von dieser Allgemeinheit zu geben, und, um so viel uns möglich, der Analogie zu folgen, wie diejenigen, die zuerst über die Kegelschn. von allen Graden gearbeitet haben; so wollen wir den Anfang mit der Verallgemeinerung des Begriffs vom Kreise machen, und uns dann einen Kegel denken, dessen Grdfl. ein Kr. von allen Graden ist; wir werden zeigen, wie man aus diesem Kegel Parb., Ellp., oder Hypb. von allen Graden schneiden kann.

## Erklärung der Kreise von allen Graden.

§ 445. Im Kr., so wie wir solchen bis jetzt betrachtet, haben wir für eine bel. Ord. und für die corresp. Absc. (Fig. 6) gefunden $AP : PM = PM : Pa$, woraus $y^2 = 2a - x^2$; aber nichts hindert, sich eine Curve so zu denken, daß $AP^m : PM^m = PM^n : Pa^n$ sei, und nennt man immer die gegebene L. 2a, die Absc. $AP = x$; der Theil $Pa = 2a - x$ und die Ord. $PM = y$, so wird diese Proportion $x^m : y^m = y^n : (2a - x)^n$; woraus die Gleich. $y^{m+n} = (2a - x)^n . x^m$, welche die Eigensch. der Kr. von allen Graden enthält. Denken wir uns jetzt diese Curve in einer Ebene gezeichnet (Fig. 1), und über dieser Ebene einen P. S, bewegen um den P. S eine gr. L., die mit ihrem untern Ende allen P. des durch die Gl. $y^{m+n} = (2a - x)^m . x^n$ vorgestellten Kr. folgt; so entsteht hieraus ein Kegel von allen Graden, in welchem man die Kegelschn. von allen Ordnungen, im parb., ellipt. oder hyperbolischen Geschlechte findet; nach der Lage der schneidenden Ebene in Betreff der Seiten des Kegels.

§ 446. I. Aufg. Die Gleichung der Curve zu finden, die aus dem Schnitte eines Kegels von allen Graden durch eine Ebene entstehet, die so gelegt wird, daß die Axe AB der Curve mit der Seite DS parallel, und der Durchschnitt dieser Ebene mit der Grundfläche perpendikular auf dem Durchmesser CD derselben Grundfläche sei. (Fig. 3).

Aufl. Der Kegel CSD sei durch eine Eb. prll. mit seiner Grdfl. geschn., so wird man wie im ersten Kap. bew. daß die gr. L. MPm, NBm; FG und CD respect. parallel sind. Da ferner PM, BN Ord. des Kr, in welchen sie sich befinden, sind, so wird man haben

$$MP^{m+n} = FP^m . PG^n \text{ u. } BN^{m+n} = CB^m . BD^n;$$

folgl. $MP^{m+n} : BN^{m+n} = FP^m . PG^n : CB^m . BD^n$,

und mit den gl. Constanten $PG^n$, $BD^n$ (sie liegen zwischen Prllen.) dividirt, so hat man

$MP^{m+n} : BN^{m+n} = FP^m : CB^m$, oder $AP^m : AB^m$,

woraus folgt, daß in den Curven, welche diese Art, den Keg. zu schneiden, giebt, die ähnl. Potenzen $m+n$ der Ord. sich verh. wie die ähnl. Potenzen $m$, $m$ der corresp. Absc.; woraus augenscheinscheinlich folgt, daß alle diese Curven vom parabolischen Geschlechte sind.

§ 447. Zus. Es sei $p^n$ eine Grß., so daß $MP^{m+n} = AP^m . p^n$; es ist sichtbar, daß man auch für jede andere Ord. BN haben wird $BN^{m+n} = AB^m . p^n$. Bezeichnet man also mit $x$ eine bel. Absc. und durch $y$ die corresp. Ord.; so hat man $y^{m+n} = p^n . x^m$, eine Gleich., welche die Natur von allen Parb. höherer Ordnung ausdrückt. Macht man $p = 1$, so hat man auch $p^n = 1$; und folgl. $y^{m+n} = x^m$; oder wenn $m+n = r$, so ist $y^r = x^m$; woraus folgt, daß diese Gleich. auch die Natur von allen Parb. ausdrückt.

§ 448. II. Aufg. Die Natur der Curven zu bestimmen, die man findet, wenn man denselben Kegel so schneidet, daß die Ebene zwei Seiten des Kegels unterhalb des Scheitels oder die eine unterhalb und die andere oberhalb schneidet; man nimmt immer an, daß die Ebene so gelegt werde, daß der Durchschnitt dieser Ebene mit der Grundfläche des Kegels perpendikular auf dem Durchmesser CD dieser Grundfläche sei. (Fig. 4 u. 5).

Aufl. Man denke sich noch zwei Eb. FMG, HNL prll. mit der Grdfl. des Keg., welche der schneidenden Eb. begegnet in Mm, Nn, die so wie die Diam. FG, HL unter sich prll. sein werden. Die Kr. FMG, HNL geben $MP^{m+n} = FP^m . PG^n$ und $NQ^{m+n} = HQ^m . QL^n$; mit-

hin $MP^{m+n} : NQ^{m+n} = FP^m . PG^n : HQ^m . QL^n$; aber die ähnl. Tr. PAF, QAH geben

$$FP^m : HQ^m = AP^m : AQ^m,$$
$$GP^n : LQ^n = aP^n : aQ^n;$$

also $FP^m . PG^n : HQ^m . LQ^n = aP^m . aP^n : AQ^m . aQ^n$; woraus evident folgt, daß

$$MP^{m+n} : NQ^{m+n} = AP^m . aP^n : AQ^m . aQ^n,$$

d. h. die ähnlichen Potenzen $m+n$ der Ord. MP, NQ verh. sich wie die Rect. aus den ähnl. Potenzen m und n der corresp. Absc.; folgl. sind diese Curven vom ellipt. und hyperbolischen Geschlechte.

§ 449. Zus. 1. Weil die Pot. $m+n$ der Ordin. sich immer verh. wie die Rect. aus den corresp. zu der Pot. m und n erhobenen Absc; so folgt hieraus dieses Verh. constant ist; und daß es ausgedrückt werden kann durch $b^m : a^m$ oder durch $p : a$; nennt man x eine Absc. AP, 2a der Diam. Aa, so ist die andere Absc. $2a \mp x$; und stellt man jede Ord. durch y vor, so hat man

$$y^{m+n} : x^m (2a \mp x)^n = b^n : a^m = p : a;$$

woraus die Gleich. $y^{m+n} = x^m (2a \mp x)^n . \frac{b^n}{a^m}$; oder

$y^{m+n} = x^m . (2a \mp x)^n . \frac{p}{a}$, welches ebenfalls die Eigenschaft der Ellp. und der Hypb. von allen Graden ausdrückt.

§ 450. Zus. 2. Fixirte man den Anfang der Absc. in der Mitte des Diam. 2a, so hätte man $AP = \pm a \mp x$ u. $aP = a + x$; folgl. $y^{m+n} : \pm (a \mp x)^m . (a + x)^n = p : a$; woraus man noch eine neue Gleich. für die Ellp. und Hypb. von allen Graden ableitet: $y^{m+n} = \pm (a \mp x)^m . (a + x)^n . \frac{p}{a}$; die so wie die vorhergehenden für $p = a$ oder $b = a$ eine

Gleich. der Kreise oder gleichs. Hyperbeln von allen Graden wird.

§ 451. III. Aufg. Die Gleichung zu finden, welche die Natur der Hyperbeln von allen Graden in Betreff ihrer Asymptoten ausdrückt.

Aufl. Wir haben (§ 364) gesehen, daß die Gleich. der Hyp. in Betreff ihrer Asympt. $xy = c^2$ ist. Diesen Begriff verallgemeinert, wie man es für die andern gethan hat: so findet man $x^m y^n = c^{m+n}$; und dieses ist die verlangte Gleichung.

§ 452 Zus. Da man die Const. $c = 1$ setzen kann, so folgt hieraus, daß $x^m y^n = 1$ auch eine Asympt.-Gleich. der Hyp. von allen Graden ist. Eben so drückt $y^n = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$ gleichfalls noch die Natur dieser Curven aus; woraus folgt, daß die Gleich. $y^r$ oder $y^{m+n} = x^m$ von allen Parb. sich auch auf alle Hyp. erstreckt, wenn nur m eine bel. neg. Grß. bezeichnet.

§ 453. I. Lehrs. Man kann alle Curven quadriren, in welchen die Subtangenten und Abscissen in einem constanten Verhältniß sind. (Fig. 100).

Bew. Es sei AMm eine bel. Curve, deren Axe AP; an ihren Scheitel ziehe AQ, eine Tang., mit welcher die Ordin. prll. laufen. MT sei eine andere Tang., begrenzt durch die Axe in T, woselbst TR prll. der Ord. MP errichtet ist; und durch zwei unendlich nahe liegende P. M, m zieht man MP, mp, MR, mr respect. prll. mit TR und mit der Axe AP. Es ist sichtbar, daß man die Trap. mpPM, mqQM als Elemente des Raums APMZA und seines Complements AQMZA ansehen kann; es ist ferner noch evident, daß die Trapeze

MPpm, MRrm oder die Prllgrm. MPpO, MRro, welche von diesen Trp. nur um die gl. und unendl. kl. Tr MmO, Mmo untersch. sind, gl. sind; nimmt man also, wie hier geschieht, an, daß PT zu PA in einem const. Verh. sei; so werden die Prllgrm. rRMo, qQMo auch in demselben Verh. stehen, weil sie bei gl. Höhe diese L. zur Grdl. haben, daher ist auch jedes Element des Raums APM zu seinem corresp. in dem Raum AQM in demselben Verh.; bezeichnet man also dieses Verhältniß durch m : n, so hat man APMZ : AQMZ = m : n und APMZ : AQMQ = m : m + n; mithin $APMZ = \frac{m}{m+n} . APMQ = \frac{m}{m+n} . xy$; folgl. sind alle diese Curven quadrirbar, weil sie mit dem Rect. aus den Coordinaten ein endliches u. gegebenes Verh. haben.

§ 454. Zus. 1. Wäre die Curve gegen die Axe convex, wie Fig. 101, so ist der Satz nicht weniger richtig, wenn nur die Subtang. immer mit der Absc. AP in einem const. Verh. steht. Denn es sei ein endliches Prllgrmm. ABCD eingeschr., und es sei die Constr. wie in Fig. 100 vollendet; es ist sichtbar, daß jedes Element MPpm des unbegr. Raums BCGF oder sein gl. MRrm sich verh. zum corresp. Element MQqm des Raums AFGCC wie PT : AP = m : n; mithin auch BFGC : AFGCD = m : n; und folgl. BFGC : AFCGD — AFCG oder ABCD = m : n — m. Folgl. $BFCG = \frac{m}{m+n} . ABCD$, welches immer, so lange der Nenner nicht o ist, eine endliche Grß. sein wird.

§ 455. Zus. 2. Wenn das Verh. m : ± m + n ein rationales Zahlenverh. ist, so ist die Curve absolut quadrirbar; ist das Verh. incommensurabel, so ist die Quadratur nicht weniger eine absolute Quadratur. Man kann sie aber in ganzen Zahlen nur durch Näherung ausdrücken. Man

kann also in Betreff der numerischen Quadraturen, die man daraus ableiten will, überhaupt drei Arten von algebr. Quadraturen der Curven unterscheiden; absolute und vollständige Quadraturen, die man durch endliche und rationale Zahlen ausdrücken kann; absolute und unvollständige, die nothw. einen endlichen aus Wurzelgrß. zusammengesetzten Ausdr. enthalten; endlich Quadraturen, die nur durch Reihen ausgedrückt werden können, und die man selbst nicht auf einen aus incommensurabeln Grß. zusammengesetzten Ausdruck bringen kann. Die Quadratur des Kr. und der Ellp. sind von solcher Beschaffenheit, welches sich aus der vorhergehenden Theorie direct schließen läßt.

§ 456. I. Lehnsatz. $\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} = Q$ wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Bew. Eine bloße Division oder auch Multiplication des Quotienten mit dem Divisor wird die Identität dieser Gleich. darthun. Oder auch so:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{a^n}{a-b} - \frac{b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

$$+ \frac{b^n}{a-b} - \frac{b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1} = Q.$$

Dieser Quotient Q ist eine geom. Reihe von n Gliedern, deren erstes Gl. $a^{n-1}$ und der Name $\frac{b}{a}$ ist.

II. Lehnsatz. $\frac{a^{-n} - b^{-n}}{a-b} = -\frac{Q}{a^n b^n} = -$

$$\left(\frac{1}{ab^n} + \frac{1}{a^2 b^{n-1}} + \frac{1}{a^3 b^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{a^{n-1} b^2} + \frac{1}{a^n b}\right) = Q'$$

wenn n eine ganze Zahl ist.

Bew. $\frac{a^{-n} - b^{-n}}{a - b} = \frac{\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}}{a - b} = \frac{b^n - a^n}{a^n b^n (a - b)}$

$= \frac{-1}{a^n b^n} \cdot \frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{-Q}{a^n b^n} = -\frac{1}{a^n b^n}(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots$

$+ ab^{n-2} + b^{n-1}) = -\left(\frac{1}{ab^n} + \ldots + \frac{1}{a^n b}\right) = Q'.$

Dieser Quotient $Q'$ ist ebenfalls eine geom. Reihe von n Gl., deren erstes Gl. $\frac{1}{ab^n}$ und der Name $\frac{b}{a}$ ist.

III. Lehnsatz. $\frac{a^{\frac{n}{m}} - b^{\frac{n}{m}}}{a - b} = \frac{a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}}{a^{n-\frac{n}{m}} + a^{n-\frac{2n}{m}} b + \ldots + b^{n-\frac{n}{m}}}$

$= Q''$ wo n und m ganze positive Zahlen sind.

Bew. Man setze $a^{\frac{n}{m}} = u$, so ist $a^n = u^m$

und $b^{\frac{n}{m}} = v$ „ $b^n = v^m$,

also $u^m - v^m = a^n - b^n$;

$(u - v)(u^{m-1} + \ldots + v^{m-1}) = (a - b)(a^{n-1} + \ldots + b^{n-1})$

(I. Lehnsatz.)

folgl. $\frac{u - v}{a - b} = \frac{a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}}{u^{m-1} + \ldots + v^{m-1}}$ d. h.

$$\frac{a^{\frac{n}{m}} - b^{\frac{n}{m}}}{a - b} = \frac{a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}}{a^{n-\frac{n}{m}} + a^{n-\frac{2n}{m}} b^{\frac{n}{m}} + \ldots + a^{\frac{n}{m}} b^{n-\frac{2n}{m}} + b^{n-\frac{n}{m}}} = Q''.$$

Der Zähler dieses Quotienten ist eine geom. Reihe von n Gl., wie im I. Lehns. Der Nenner ist eine geom. Reihe von m Gl. deren erstes $a^{n-\frac{n}{m}}$ und deren Name $a^{-\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}}$ ist.

IV. Lehnsatz. $\frac{a^{-\frac{n}{m}} - b^{-\frac{n}{m}}}{a-b} = \frac{-Q''}{(ab)^{\frac{n}{m}}}$

$$= \frac{-(a^{n-1} + \ldots + b^{n-1})}{a^n b^{\frac{n}{m}} + a^{n-\frac{n}{m}} b^{\frac{2n}{m}} + \ldots + a^{\frac{n}{m}} b^n} = Q'''.$$

Bew. $\frac{a^{-\frac{n}{m}} - b^{-\frac{n}{m}}}{a-b} = \frac{-1}{(ab)^{\frac{n}{m}}} \cdot \frac{a^{\frac{n}{m}} - b^{\frac{n}{m}}}{a-b}$ (II. Lehns.)

$$= \frac{-1}{(ab)^{\frac{n}{m}}} \cdot Q'' = \frac{-1}{(ab)^{\frac{n}{m}}} \cdot \frac{a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}}{a^{n-\frac{n}{m}} + a^{n-\frac{2n}{m}} b^{\frac{n}{m}} + \ldots + b^{n-\frac{n}{m}}}$$

(II. Lehns.) $= \frac{-(a^{n-1} + \ldots + b^{n-1})}{a^n b^{\frac{n}{m}} + a^{n-\frac{n}{m}} b^{\frac{2n}{m}} + \ldots + a^{\frac{n}{m}} b^n} = Q'''$

Der Zähler ist eine geom. Reihe wie im I. Lehns. Der Nenner ist eine geom. Reihe von m Gl., deren erstes $a^n b^{\frac{n}{m}}$ und deren Name $\frac{b}{a}$ ist. Setzen wir in diesen vier Lehnsätzen $b = a$, so ergeben sich nachfolgende vier Lehnsätze.

V. $\frac{a^n - a^n}{a-a} = na^{n-1}$; VI. $\frac{a^{-n} - a^{-n}}{a-a} = \frac{-n}{a^{n+1}} = -na^{-n-1}$;

VII. $\frac{a^{\frac{n}{m}} - a^{\frac{n}{m}}}{a-a} = \frac{na^{n-1}}{ma^{n-\frac{n}{m}}} = \frac{n}{m} a^{\frac{n}{m}-1}$ und

VIII. $\frac{a^{-\frac{n}{m}} - a^{-\frac{n}{m}}}{a-a} = \frac{-na^{n-1}}{ma^{n+\frac{n}{m}}} = \frac{-n}{m} a^{-\frac{n}{m}-1}$.

Anmerk. Diese Lehns. nebst ihren Folgerungen habe ich bereits 1798 in meiner Abh. sur le calcul d'exposition in den Mem.

der Berl. Akad. der Wissenschaften erwiesen, und daraus den Differentialcalcül abgeleitet; viele Jahre später ist der verdienstvolle Langsdorf auch auf diese Darstellung des Differentialcalcül gefallen, ohne meine frühere Abh. gekannt zu haben.

§ 457. IV. Aufg. Die Subtangente der durch die allgemeine Gleichung $y^m = x^n$ vorgestellten Curven zu finden (Fig. 102).

Aufl. Denken wir uns eine bel. Sec. mMT, die sich auf der Axe in T endiget, und es seien die Absc. AP = x, Ap = z; die corresp. Ord. PM = y, pm = u. Es ist sichtbar, daß das Verh. von PM zur Subsec. PT wegen der ähnl. Tr. mRM, MPT gl. dem Verh. von mR zu MR ist. Die Gleich. $y^m = x^n$ giebt $y = x^{\frac{n}{m}}$, und eben aus denselben Gründen $u = z^{\frac{n}{m}}$; also pm — PM oder mR = $z^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n}{m}}$ und Pp oder MR = z — x; weil nun PM : PT = mR : MR, so hat man $\frac{PM}{PT} = \frac{z^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n}{m}}}{z - x} = \frac{y}{\text{Subsec.}}$. Nehmen wir nun jetzt an, daß pm in PM falle, so wird die Subsec. zur Subtg; die Absc. AP = Ap oder x = z. Also nach dem VII. Lehns.: $\frac{y}{\text{Subtg.}} = \frac{n}{m} \cdot x^{\frac{n}{m}-1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{x^{\frac{n}{m}}}{x} = \frac{n}{m} \cdot \frac{y}{x}$; woraus sogleich Subtg. $= \frac{m}{n}\, x$.

§ 458. Zus. 1. Es sind also alle durch die allg. Gleich. $y^m = x^n$ vorgestellten Curven quadrirbar, weil in allen diesen Curven die Subtg. mit der Absc. in einem const. Verh. ist, wie es durch die Gleich. Subtg. $= \frac{m}{n}\, x$, also durch die Prop. m : n = Subtg. : x einleuchtet. Folgl.,

nach dem, was man (§ 453 u. 454) gesehen hat, ist die allg. Formel um den Raum APMZ $= \frac{m}{m+n} xy$; oder $x^{\frac{n}{m}}$ statt y gesetzt, APMZ $= \frac{m}{m+n} x^{\frac{n}{m}+1} = \frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$; und auch die Formel, um die Quadratur von allen Complementen AQMZ zu finden, wird sein

$$AQMZ = \frac{n}{m+n} xy = \frac{n}{m+n} y^{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n} y^{\frac{m+n}{n}},$$

wenn man $x = y^{\frac{m}{n}}$ setzt.

§ 459. Zus. 2. Läßt man die Absc. AP, Ap nach einer arithm. Progression der natürlichen Zahlen ÷ 0, 1, 2, 3..... wachsen, und ist die Einheit oder die Differenz dieser Progr. ein unendlich Kleines, so ist, weil jede Ord. $y = x^{\frac{n}{m}}$, einleuchtend, daß diese Ord. nichts anders sind als die Gl. dieser Progr., alle zur Potenz $\frac{n}{m}$ erhoben: mithin die Summe von allen Ordin. oder die Fläche der Curve wird die Summe von allen Gl. dieser Reihe $0^{\frac{n}{m}}$, $1^{\frac{n}{m}}$, $2^{\frac{n}{m}}$, .... bis zu $x^{\frac{n}{m}} = \infty^{\frac{n}{m}}$ sein, weil man immer annehmen kann, daß eine endliche Absc. eine unendliche Menge unendl. kl. Theile enthält. Eben so, wenn man die Absc. auf AQ nimmt, oder, welches einerlei, wenn man sich einbildet, daß die Theile AQ, Aq oder die ihr gl. Ord. PM, pm nach einer so eben genannten arithm. Progr. wachsen; so ist, da jede Absc. $x = y^{\frac{m}{n}}$, sichtbar, daß QM, qm die Potenz $\frac{m}{n}$ der corresp. Ord. sein werden; folgl. ist die Summe

dieser L. QM, qm oder die Fläche des Compl. AMQZ die Summe von allen Gl. der natürlichen Zahlen, jede mit dem Exponenten $\frac{m}{n}$.

§ 460. Die Quadratur der durch die Gleich. $y^m = x^n$ vorgestellten Curve giebt also auch zugl. die Aufl. von dieser Aufg.

Die Summe aller ähnl. Potenzen von allen möglichen Zahlen von o bis ins Unendliche zu finden;

Die Formeln $\frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$ und $\frac{n}{m+n} y^{\frac{m+n}{n}}$, zeigen uns an, was man machen müsse, um sie zu lösen. Hier das Verfahren.

Man vermehrt den Exp. der gegebenen Potenz um Eins; und mit diesem neuen Exp. dividirt man das zu dieser Potenz erhobene letzte Gl.

Wir wollen dieses künftig kurz so angeben:

$$\int y = \int x^{\frac{n}{m}} = \frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$$

$$\text{und } \int x = \int y^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m+n} \cdot y^{\frac{m+n}{n}}.$$

Einige Beisp. mögen dieses erläutern.

Es sei b die Grundl. und a die Höhe eines bel. Tr. Man denke sich mit der Grdl. Prllen., die wir y nennen wollen, so wie ihr Abstand von der Spitze x sein mag, so ist $x : y = a : b$, also $y = \frac{b}{a} \cdot x$; läßt man nun hier x von der Spitze aus nach dem Gesetz der Stetigkeit wachsen, so erhält x nach und nach die Werthe o, 1, 2 . . . . Die Summe aller Elem. bis zu x wäre also

$$\int y = \frac{b}{a}\int x = \frac{b}{a}(0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + x)$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{b}{a} x \cdot \frac{x}{2} = \frac{yx}{2}.$$

Und dieses ist in der That der Inhalt eines Tr., dessen Grdl $y$ und dessen Höhe $x$ ist, setzt man $x = a$, so wird $y = b$ und wir haben den Inhalt des ganzen Tr. $= \frac{ab}{2}$.

Es sei B die Grdfl. einer bel. Pyr. und a deren Höhe; prll. Durchschn. mit der Grdfl. mögen y und deren Abstand von der Spitze x genannt sein, so ist

$$x^2 : a^2 = y : B; \text{ folgl. } y = \frac{B}{a^2} \cdot x^2.$$

Also $\int y = \frac{B}{a^2}\int x^2 = \frac{B}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{B}{a^2} x^2 \cdot \frac{x}{3} = \frac{y \cdot x}{3}$,

und dieses ist der Inhalt von einer abgeschn. Pyr., deren Grdfl. y und Höhe x. Setzen wir $x = a$, so wird $y = B$ und der Inhalt der ganzen Pyr $= \int y = \frac{a \cdot B}{3}$.

Es sei r der Halbm. einer Kugel, x eine Absc. aus dem Mittelp., und y die dazu gehörige Ord., so ist bekanntlich $y^2 = r^2 - y^2$, also ein Elem. der Kug. $\pi y^2 = \pi(r^2 x^0 - x^2)$;

$$\text{folgl. } \int \pi y^2 = \pi\left[r^2 \int x^0 - \int x^2\right]$$

$$= \pi\left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{\pi x}{3}(3r^2 - x^2)$$

= dem Inhalt eines Kugelstücks zwischen einem größten Kr. und einem prll. Kr., deren Abstand x ist. Setzen wir $x = r$, so haben wir den Inhalt der Halbk. $= \frac{2}{3} r^3 \pi$.

§ 461. Zus. 4. Da umgekehrt jede Größe als eine Summe aller natürlichen Zahlen, alle zu einerlei Potenz erhoben, angesehen werden kann; so könnte man immer das

Element von dieser Grß. finden, wenn man das umgekehrte Verfahren (§ 460) befolgt, welches sich so ausspricht:

Man multipl. die gegebene veränderl. Grß. mit ihrem Exp., und giebt ihr einen neuen um Eins kl. Exp.; der neue Ausdruck ist das gesuchte Element.

Um also das Element der Grß. $\frac{b}{a} \cdot \frac{x^2}{2}$; $\frac{B^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}$; $\pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$ zu finden, schreibe ich sie so: $\frac{b}{a} \cdot \frac{2 \cdot x^{2-1}}{2}$. $= \frac{b}{a} x$; $\frac{B^2}{a^2} \cdot \frac{3 \cdot x^{3-1}}{3} = \frac{B^2}{a^2} x^2$; $\pi \cdot \left(r^2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - \frac{3 \cdot x^{3-1}}{3}\right)$ $= \pi(r^2 - x^2)$. Allgemein von $A \cdot x^n$ ist das Element $= A \cdot n x^{n-1}$.

§ 462. Anmerk. Diese interessante Theorie, die ich hier nicht weiter verfolgen darf, ist im Wesentlichen einerlei mit der Differential- und Integralrechnung, und wenn wir statt der Einheit dx einführten, so würden auch ferner die Bezeichnungen ganz übereinstimmen. Wir müssen uns begnügen, dieses angezeigt zu haben.

§ 463. V. Aufg. Mittelst der Reihen die gewöhnliche Parabel zu quadriren. (Fig. 100)

Aufl. Man kann die Fläche von einem Parabelstück APM ansehen als die Summe von allen mögl. Ord. corresp. allen Absc., die nach der arithm. Progr. 0, 1, 2, 3... wachsen, deren Differenz 1 ein unendlich kl. Theil von AP ist. Da sich alle Ord. unter sich verh. wie die Qdrw. aus den Absc., so werden sie sich auch verh. wie die Qdrw. aus den Gl. derselben Reihe; und folgl. wird die Fläche des parb. Segment der Summe von allen Gl. der Reihe

$$0^{\frac{1}{2}}, 1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}} \ldots x^{\frac{1}{2}} = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} =$$
$$\tfrac{2}{3} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3} x \cdot y \text{ (§ 204).}$$

Anmerk. Da Summen von L. keine Flächen erzeugen können, so muß man sich eigentlich statt der L., die man summiren soll, denken, die zu quadrirende Fläche sei gl. der Summe von einer unendl. Menge kl. Rect. APpm (Fig. 100), deren Höhe die verschied. Ord. der Curve sind, und die alle eine gl. Grdl. Pp haben, die man als einen unendl. kl. Theil von AP = x annimmt u. durch 1 vorstellt. Alle diese kl. Rect. von gl. Grdl. verh. sich wie ihre Höhen, welches die Ord. sind; folgl. die Summe von allen diesen Rect. oder die Fläche der Curve wird sich auch wie die Summe dieser Ord. verh.; und man sieht durch diese Schlüsse wie beide Methoden auf eins hinaus laufen, und man nur der Kürze wegen sich der ungeometrischen Sprache bedient.

§ 464. VI. Aufg. Die Fläche von einem Ellipsentheil CBMP zu finden, welcher durch einen Theil CP der Axe oder eines beliebigen Diameters, durch die Axe oder Diameter CB dem ersten conjugirt, durch einen Theil BM der Curve und durch eine Ordinate PM begrenzt ist, die Abscissen aus dem Mittelp. genommen. (Fig. 75).

Aufl. Wir denken uns immer die zu quadrirende Fläche als angefüllt von einer unendl. Menge Ord. dicht neben einander gestellt, und deren Absc. nach einer arithm. Progr. 0, 1, 2 . . . wachsen, deren Differenz = 1 eine unendlich. kl. Theil von der Absc. CP ist. Die Gleich. für die Ellp. ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, u. daher $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ ein Element der Fläche, also $\int y = \frac{b}{a}\int\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Nun deutet $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ das Element eines Kr. an, dessen Halbm. a und x die Absc. aus dem Mittelp., mithin stellt $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Fläche eines Kreisstücks vor, welches zwischen dem Halbm. a und einer ihm in der Weite x prll. Ord. $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ liegt. Entw. man $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ nach dem Binomischen Lehrs., so erhalten wir

$$\int y = \frac{b}{a}\int\left(ax^0 - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \ldots\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left(a\int x^0 - \frac{1}{2a}.\int x^2 - \frac{1}{8a^3}.\int x^4 - \frac{1}{16a^5}.\int x^6 - \frac{5}{128a^7}.\int x^8 - \ldots\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left(ax - \frac{1}{2a}.\frac{x^3}{3} - \frac{1}{8a^3}.\frac{x^5}{5} - \frac{1}{16a^5}.\frac{x^7}{7} - \frac{5}{128a^7}.\frac{x^9}{9}\ldots\right)$$

$$= bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}, \ldots.$$

Diese Reihe wird um so convergirender sein und folgl. eine um so schnellere Näherung geben, als x im Verh. zu a kl. ist. Da man bis jetzt diese Reihe nicht hat summiren können, so kann die absolute Quadratur der Ellp. nur durch Näherung gefunden werden.

§ 465. Zus. 1 Nimmt man $x = a$ an, so hat man die Fläche von $\frac{1}{4}$ Ellp. $= ab\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152} - \ldots\right)$

Folgl. Ellp. $= 4ab\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \ldots\right)$.

Nimmt man $a = b$ an, wie dies im Kr. der Fall ist, so ist der Inhalt des Kr. $= 4a^2\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - .\right)$

$$= a^2\left(4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{28} - \frac{1}{288} - \right)$$

§ 466. Zus. 2. Die Flächen zweier Ellp. verh. sich wie die Rect. aus ihren Axen; denn jede ist $=4ab\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \ldots\right)$. Man bezeichne $4\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \ldots\right)$ mit $\pi$, so ist der Inhalt der Ellp. $= ab\pi$. Sucht man zwischen a und b eine mittlere Proportionale c, so ist $ab\pi = c^2\pi$ und die Ellp. ist also gleich einem Kr., dessen Halbm. c die mittlere Proport. zwischen den beiden Axen ist (§ 284).

§ 467.

§ 467. VIII. Aufg. Die Fläche von einem Theil ACQM der Hyperbel zu finden. (Fig. 83.)

Aufl. Wir haben gesehen, daß wenn man die Absc. CQ auf der zweiten Axe nimmt und die Ordn. prll. mit der ersten zieht, so hat man $QM^2 : CQ^2 + CB^2 = CA^2 : CB^2$; setzen wir also $CQ = x$; $QM = y$; $AC = a$; $CB = b$; so wird man haben

$$y^2 : x^2 + b^2 = a^2 : b^2; \text{ folgl. } y = \frac{a}{b} \sqrt{(x^2 + b^2)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \left(bx^0 + \frac{x^2}{2b} - \frac{x^4}{8b^3} + \frac{x^6}{16b^5} - \frac{5x^8}{128b^7} + \frac{7x^{10}}{256b^9} - \ldots\right);$$

folgl. die Fläche der Hypb. ACQM =

$$\int y = ax\left(1 + \frac{x^2}{6b^2} - \frac{x^4}{40b^4} + \frac{x^6}{112b^6} - \frac{5x^8}{1152b^8} + \frac{7x^{10}}{2816b^{10}} - \ldots\right)$$

welches um so convergirender sein wird, je mehr x kl. als b ist.

§ 468. Zus. 1. Setzt man $x = b$, so hat man in diesem Fall den hyperbolischen Flächeninhalt

$$= ab\left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{40} + \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} + \frac{7}{2816} - \ldots\right),$$

und wenn die Hypb. gleichs. ist, oder, was einerlei, wenn $a = b$, so ist die hyperbolische Fläche ACBM =

$a^2\left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{40} + \ldots\right)$. Vergl. man also eine bel. Hypb. mit der gleichs., welche die zweite Axe gemein hat, so verh. sich die auf einer gemeinsch. Absc. stehenden Flächen wie die ungleichen Axen. Die Quadratur der gleichs. Hypb. giebt also die von allen andern Hypb.; wie die Qdr. des Kr. die von allen Ellp. giebt.

§ 469. Zus. 2. Zieht man die Fläche ACQM von dem Rect. CPMQ = xy ab, so hat man das halbe Segm. APM. Man fände eben den Inhalt des Ausschnitts CAM begrenzt

durch den Diam. CM der ersten Axe AC und der Curve AMM, wenn man den Tr. CQM = $\frac{1}{2}$xy von ACQM abzieht.

§ 470. VIII. Aufg. Den Flächenraum zwischen der Hyperbel und ihrer Asymptote zu finden. (Fig. 103).

Aufl. Man kann sich diesen Raum mit einer unendlichen Menge von kl. Rect. wie BblL angefüllt vorstellen, die alle einen unendlich kl. Theil der Asympt. zur Grdl. und zur Höhe die corresp. Ord. BL haben. Da alle diese Rect gl. Grdl. haben, so wird ihre Summe oder der hyperbolische Inhalt sich wie die Summe von allen Ordin. verh. Aus (§ 451) haben wir die hieher gehörige Gleich.

$$x^m y^n = c^{m+n}, \text{ oder } c = 1;\ y^n = \frac{1}{x^m} = x^{-m}, \text{ also}$$

$$y = x^{-\frac{m}{n}};\ \text{folgl.} \int y = \int x^{-\frac{m}{n}} = \frac{n}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} =$$

$$\frac{n}{n-m} x \,.\, x^{-\frac{m}{n}} = \frac{n}{n-m} \,.\, xy.$$

Wendet man diese Formel auf die gewöhnliche Hypb. an, indem man m u. n = 1 macht, so findet man den Asymptotischen Raum $= \frac{xy}{0} = \infty$.

Man wird § 493 sehen, welches die Beschaffenheit dieses unendlichen Raums, und warum er wirklich unendlich ist. Man wird auch zeigen, welches die Einheit ist, in Betreff deren er unendlich ist; denn man muß wohl in Acht nehmen, daß das Unendliche, von welchem hier die Rede ist, nur ein relatives Unendliches ist.

§ 471. IX. Aufg. Durch eine algebraische Reihe den Raum ABLK auszudrücken, welcher zwischen einem Theil

KL der Hyperbel, einem Theil AB von ihrer Asymptote und zwei beliebigen Ordinaten AK, BL auf derselben Asymptote enthalten ist. (Fig. 103).

Aufl. Um ein von dem letztern versch. Resultat zu finden, so nehmen wir auf einer der Asympt. AC = a, wählen die xen aus denselben P. A, u. machen AB, AD = x. Durch A ziehen wir AK prll. mit der andern Asympt. CR und machen noch AK = c und L. wie BL, DM = y. Welches CB oder CD = a + x geben wird. Weil nun CB . BL oder CD . DM = CA . AK, so hat man

$$(a + x)\,y = ac;\ \text{folgl.}\ y = \frac{ac}{a + x},$$

$$\text{oder}\ y = c - \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{a^2} - \frac{cx^3}{a^3} + \ldots,$$

$$\text{oder}\ y = c\left[\frac{x^0}{a^0} - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \ldots\right];$$

diese Reihe wird um so convergirender sein, je kl. x in Vergleich mit a sein wird. Man findet also den asymptotischen Raum ABLK oder ADMK =

$$\int y = c\,.\left[\frac{x}{a^0} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \ldots\right],$$

oder, wenn man AC, AK einander gl. und jede gl. der Einheit macht, so hat man

$$\text{ABLK oder ADMK} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Wenn, statt die xen nach F zu zu nehmen, man sie nach C zu nähme; oder, welches auf eins hinaus läuft, wenn man einen asymptotischen Raum suchte, so wie AGHK; so darf man in der gefundenen Reihe x nur neg. machen, u. wird finden

$$\text{AGHK} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right),$$

immer AC = AK = 1 gesetzt.

Die allgem. Reihe $\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$ wird also die auf beiden Seiten von AK liegende asymptotische Flächeninhalte vorstellen.

§ 472. Zus. 1. Nimmt man eine andere L. CB $= b$ und eine andere Absc. BD $= z$, deren Anfang in B und deren corresp. Ord. DM $t$ genannt sei und immer CA $=$ AK $= a$; so ist die Gleich. der Hypb. $(b + z)\, t = a^2$. Jede in dem Theil LBTX enthaltene Ord. wird also sein

$$t = \frac{a^2}{b+z} = \frac{a^2z^0}{b} - \frac{a^2z}{b^2} + \frac{a^2z^2}{b^3} - \frac{a^2z^3}{b^4} + \ldots$$

Man hat also den Raum LBDM oder LBFN und andere ähnl. jedem $= \int y = \frac{a^2z}{b} - \frac{a^2z^2}{2b^2} + \frac{a^2z^3}{3b^3} - \frac{a^2z^4}{4b^4} + \ldots$

Nimmt man ferner diese Reihe gl. der vorhergehenden an, die, wenn $a = c$, sich verw. in

$$ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} - \ldots$$

oder, welches einerlei, wenn man den Raum ABLK $=$ LBDM annimmt, so hat man diese Gleich.

$$\frac{a^2z}{b} - \frac{a^2z^2}{2b^2} + \frac{a^2z^3}{3b^3} - \ldots = ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} - \ldots$$

Da beide Reihen eine gl. Anzahl Gl. haben und die veränderlichen Grß. in gleichstelligen Gl. zu gl. hohen Potenzen erhoben sind, so ist jedes Gl. der einen dem gleichstelligen Gl. der andern gl.; folgl. $ax = \frac{a^2z}{b}$ oder $x = \frac{az}{b}$; woraus $a : b = x : z$. Da überdem die Grß. $x$ und $b$ unbestimmt sind, so kann man annehmen $b = a + x$; so hätte man

$a : a + x = x : z$, oder CA : CB $=$ AB : BD; folgl. CA : CB $=$ CB $-$ CA : CD $-$ CB, weil AB $=$ CB $-$ CA

u. BD = CD — CB; woraus CA . CD = $CB^2$; mithin CA : CB = CB : CD;

folgl. sind die Absc. CA, CB, CD, deren Differenzen AB, BD den gl Räumen ABLK, LBDM entsprechen, in geom. Progression.

§ 473. Zus. 2. Hat man eine Reihe von Absc. CA, CB, CD, CF in geom. Progr., so sind die über den Differenzen dieser Absc. stehenden hyperbolischen Flächen ABLK, BDML, MDFN unter sich alle einander gl. Folgl. wachsen die Inhalte ABLK, ADMK, AFNK in arithm Progr., wenn die Absc CA, CB, CD, CF in geom. Progr. wachsen. Der Erkl. der Log. gemäß sind folgl. diese hyperbolischen Fl. die Log der corresp. Absc. Man kann also mittelst der hyperbol. Fl. die Log. berechnen und umgekehrt.

Anmerk. Alles dieses ist eine Folge von dem, was im ersten Zus. erwies. worden. Da diese Theorie außerordentlich merkwürdig und in versch. Theilen der Mathem. von vielfältigem Gebrauch ist, so wird es nicht undienlich sein, hier in einige Details einzugehen; um nun diese Materie noch mehr aufzuklären, wollen wir einen neuen Bew. von dieser Eigenschaft in dem folgenden Lehrs. geben.

§ 474. V. Lehrs. Wenn man eine in geometrischer Progression stehende Reihe von Abscissen CA, CB, CD, CF hat: so sind 1) ihre Differenzen AB, BD, DF auch in geometrischer Progression; 2) die über den Differenzen dieser Abscissen stehenden hyperbolischen Flächen ABLK, BDML DFNM sind gleich. (Fig. 103).

Bew. 1) Weil CA : CB = CD : CF, so hat man

CB — CA : CA = CD — CB : CB

und CD — CB : CB = CF — CD : CD.

Weil nun CA, CB, CD in geom. Progr. gedacht werden,

so müssen auch die Diff. CB — CA, CD — CB, CF — CD oder bloß AB, BD, DF in geom. Progr. sein.

2) Denken wir uns die Diff. AB, BD, jede in eine gl. Anzahl unendlich kl. Theil. bB, dD getheilt; denken wir ferner die hyperbolischen Fl. ABLM, BDML zusammengesetzt aus kl. Fl. BblL, DdmM die Bb, Dd zu Grdl. und die Ord. zur Höhe haben, so kommt alles darauf an, zu bew., daß diese Elemente gl. sind, da auf beiden Seiten gl. viel gedacht werden. Nun haben wir durch die Annahme

Bb : Dd = AB : BD u. nach dem 1. Th. des Lehrs.
AB : BD = CA : CB u. wegen der geom. Progr.
CA : CB = CB : CD, u., weil CD . DM = CB . BL,
so ist CB : CD = DM : BL.

Folgl. haben wir Bb : Dd = DM : BL; demnach Bb . BL = Dd . DM oder BblL = DdmM. Eben so würde man die Gleichheit von allen andern Elem. bew; folglich sind die hyperbolischen Fl. gl., wenn sie zur Grdl. die in geom. Progr. stehenden Differ. der Absc. haben.

§ 475. Zus. 1. Aus der Natur der Hypb., wenn die Absc. CA, CB, CD, CF in geom. Progr., folgt, daß auch die corresp. Ord. AK, BL, DM, NF eine abnehmende geom. Progr. bilden; und ferner daß die Verh. dieser Ord. mit der ersten vergl. auch in zunehmender geom. Progr. stehen; denn es sei q der Name des Verh. AK : BL, so ist der von AK : DM = $q^2$, der von AK : NF = $q^3$; wie es aus der Natur der geom. Progr. einleuchtet; folgl. sind die hyperbol. Fl ABLK, ADMK, AFNK die Log. nicht allein von den Absc. CB, CD, CF sondern auch von den Ord. LB, MD, NF und der Verh. der ersten Ord. AK zu denselben Ordin.

§ 476. Zus. 2. Zieht man durch den Mittelp. C die Diam. CK, CL, CM, CN ꝛc. so ist sichtbar, daß die

hyperbol. Ausschn. CLK, CML, CNM unter sich gl. und den corresp. Räumen ABLK, BDML, DFNM gl. sind; denn nimmt man an, daß der Diam. CL die Ord. AK in P schneidet, so ist sichtbar, daß der Tr. CPK gl dem Trp. APLB, weil man nur von den durch die Natur der Hypb. gl. Tr. CAK, CBL den gemeinschaftl. Tr. CAP abnehmen darf; setzt man also auf beiden Seiten den vermischtlinigen Tr. PLK hinzu, so wird man den Aussch. CLK = ABLK haben, und eben so die andern. Wenn also die hyperbol. Fl. AL, AM, AN in arithm. Progr. wachsen und die Log. von den Absc. CB, CD, CF oder von den Ordin. BL, DM, FN oder von den Verh. $\frac{AK}{BL}$, $\frac{AK}{DM}$, $\frac{AK}{FN}$ sind; so werden die hyperbol. Ausschn. CLK, CMK, CNK auch in arithm. Progr. wachsen, und werden die Log. von denselben Grß. sein.

§ 477. Zus. 3. Hieraus folgt, daß die Ord. AK, BL den Ord. DM, FN proportional, oder, welches einerlei, wenn die Absc. CA, CB, CD, CF, die ihnen entspr., in Proport. sind, so sind die asymptot. Fl. ABLK = DFNM, oder die correspond. Sectoren gl. Dieses folgt, weil diese nämlichen Fl. sich zu einander verh. wie die Verhältnißexponenten der Ord. AK, BL; DM, FN.

§ 478 Zus. 4. Immer AC = AK = 1 angenommen, und den Anfang der Absc. in A; AB oder AG = x, so ist CB = 1 + x und CG = 1 − x. Weil nun die Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$ den Inhalt ABLK und die Reihe $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$ den Inhalt AGHK vorstellt, so folgt hieraus, daß diese zwei Reihen die Log. der Zahlen 1 + x und 1 − x vorstellen. Die erste stellt die Log. der Zahlen > 1 und die die der Zahlen < 1 vor. Ferner,

weil die Einheit immer Null als Log. in der Hypb. hat; so muß der Log. eines ächten Bruches $1-x$ nothw. neg. sein. Welches auch einleuchtet, weil die Fl. ABLK, AGHK auf versch. Seiten vom Anfg. der Abse liegen; wenn die eine pos. ist, so muß die andere neg. sein.

§ 479. Zus. 5 Folglich $\lg(1+x) - \lg(1-x) = \lg\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \ldots$

§ 480. Zus. 6. Wenn $\frac{1+x}{1-x} = \frac{M}{N}$, welches für $N=1$ eine ganze Zahl wird; so ist $x = \frac{M-N}{M+N}$; also $\lg\frac{M}{N} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots = 2\left[\frac{M-N}{M+N} + \frac{1}{3}.\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3 + \ldots\right]$. Denn $\lg\frac{M}{N}$ wird man um so genauer haben, je mehr Gl. man von dieser Reihe nimmt, die immer convergirend ist; woraus man eine allgem. Vorschrift, die Log. von Bruch und ganzen Zahlen zu berechnen, zieht.

## Allgemeine Regel, um die Hyperbolischen Log. von allen Arten von Zahlen zu finden.

§ 481. Wenn die gegebene Zahl eine ganze Zahl ist, z. B. M, so schreibe man $\frac{M}{1}$; in allen Fällen dividirt man die Differ. des Zählers und Nenners durch die Summe dieser Gl. Alle ungerade Potenzen, diese Quotienten dividire man mit ihrem Exp. das doppelte ihrer Summe wird der verlangte hyperb. Bog. sein.

§ 482. Beisp. Man verl. $\lg 2$ oder $\lg\frac{2}{1}$. Ich setze

$M = 2$; $N = 1$; also $x = \frac{M - N}{M + N} = \frac{1}{3}$; folgl. lg 2

$$= 2\left[\frac{x}{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{9} + \frac{x^3}{9 \cdot 5} + \frac{x^5}{9 \cdot 7} + \frac{x^7}{9 \cdot 9} + \frac{x^9}{9 \cdot 11} + \ldots\right]$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \cdot 0{,}33333333 = 0{,}33333333$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{x}{9 \cdot 3} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}03703703 = 0{,}01234567$$

$$\frac{x^5}{5} = \frac{x^3}{9 \cdot 5} = \frac{1}{5} \cdot 0{,}00411522 = 0{,}00082304$$

$$\frac{x^7}{7} = \frac{x^5}{9 \cdot 7} = \frac{1}{7} \cdot 0{,}00045724 = 0{,}00006532$$

$$\frac{x^9}{9} = \frac{x^7}{9 \cdot 9} = \frac{1}{9} \cdot 0{,}00005080 = 0{,}00000564$$

$$\frac{x^{11}}{11} = \frac{x^9}{9 \cdot 11} = \frac{1}{11} \cdot 0{,}00000564 = 0{,}00000051.$$

Summe 0,34657351

folgl. lg hyp. 2 = 0,69314702.

§ 485. Anmerk. Vergl. man die so eben gefundene Zahl 0,69314702 = lg hyp. 2 mit dem lg 2 = 0,30103000 in den Log. Tafeln, so wird man leicht sehen, daß diese Log. nothw. zu versch. Syst. gehören; wenn man aber den hyperbol. Log. von einer Zahl hat, so ist es sehr leicht durch seine Hülfe den Tafel-Log. durch eine einfache Prop. zu finden; und dieses ist einer der größten Vortheile der hyperbol. Log. Lg. hyp. 10 = 2,30258509 hat man auf eine ähnl. Art berechnet, wie oben lg. hyp. 2 berechnet worden ist. Ferner ist bekanntlich lg tab. 10 = 1. Nun schließt man lg hyp. 10 : lg tab 10 = lg hyp. a : lg tab. a,

folgl. $\text{lg tab. a} = \frac{\text{lg tab. } 10}{\text{lg hyp. } 10} \cdot \text{lg hyp. a} = \frac{1}{2{,}30258509} \cdot \text{lg hyp. a}$

= 0,43429448 . lg hyp. a; um also den lg tab. von einer bel. Zahl a zu haben, muß man den hyperbol. Log. von dieser Zahl a mit 0,434294448 multipl., welche die Geometer den Modulus der

hyperbol. Log. nennen; also $\lg \text{tab.}\ 2 = 0{,}43429448 \cdot \lg \text{hyp.}\ 2 = 0{,}30102992 46144496 = 0{,}30103000$. Das Vorstehende gründet sich einzig darauf, daß die Log. von einerlei Zahlen in versch. Hypb., oder, welches einerlei, daß die Trp. oder hyperbol. Sectoren, welche proportionalen Ord. entsprechen, immer in einem beständigen Verh. sind. Ob es gleich sehr leicht ist, sich von dieser Wahrh. zu überzeugen, so wollen wir sie doch, um jedem Wunsch zu begegnen, in folgendem Lehrs. beweisen.

§ 484. VI. Lehrs. In zwei beliebigen zwischen ihren Asymptoten beschriebenen Hyperbeln, AM, DN; CA und AB den halben Axen der ersten, CD und DF den halben Axen der zweiten nimmt man auf einer Asymptote von jeder Hyperbel Abscissen CG, CP, CL, CQ, unter sich proportional, so sind 1) die durch die Endpunkte dieser Abscissen parallel mit der andern Asymptote geführten Ordinaten GA, PM; DL, QN auch in Progressionen: 2) verhalten sich die zwischen denselben Ordnungen liegenden hyperbolischen Flächen AGPM, DLQM wie die Rectangel aus den Axen oder wie die Potenzen AGCH, DLCK der nämlichen Hyperbeln. (Fig. 104 und 105.)

Bew. 1) Nach der Hyp. ist $CG : CP = CL : CQ$; aber nach den Eigensch. von jeder Hypb.

$$CG : CP = PM : GA \text{ und}$$
$$CL : CQ = QN : DL;$$
$$\text{folgl. } PM : GA = QN : DL.$$

Macht man also die Seiten CG oder GA der Potenz $AGCH = m$ und die Seiten CL, DL der andern Potenz $DLCK = n$; $CP = x$, $PM = y$; $LQ = u$ und $QN = z$; so wird man haben

$$m : m + x = n : n + u; \text{ woraus } u = \frac{nx}{m}.$$

2) Durch die Endp. G, L von AG, DL seien auf die Asympt. CH und CK die Prpd. GR, LP gezogen; so ist sichtbar, daß in jeder Hypb. die Räume AGPM, DLQN zwischen den schiefen Ord. AG, PM, DL, QN sich zu den Räumen, die dieselben Grdl. und Ord haben, die aber prd. auf diesen nämlichen Grdl. sind, verh. wie 1 zu dem Sinus des Neigungsw. der Asympt.; d. h. in der ersten Hypb., wie CG : GR, und in der zweiten wie CL : LS; um also diese nämlichen Flächen zu haben, so darf man nur den Inhalt dieser Trp. suchen, als wären die Ord. prd. auf den Asympt., und sie nachgehends mit den Verhältniß-Namen $\frac{GR}{CG}$, $\frac{LS}{CL}$ zu multipl.; dieses angenommen, so ist weiter CG : CP = PM : AG oder $m : m + x = y : m$, also $y = \frac{m^2}{m+x}$ $= m^2 \cdot \frac{1}{m+x} = m^2 \cdot \left(\frac{x^0}{m} - \frac{x}{m^2} + \frac{x^2}{m^3} - \frac{x^3}{m^4} + \ldots\right)$,

$$\text{folgl. Fl. AGPM} = \frac{RG}{CG} \cdot \int y$$

$$= RG \cdot m \cdot \left[\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} + \frac{x^4}{4m^4} + \ldots\right].$$

Eben so wegen der Prop. CL : CQ = QN : DL oder $n : n + u = z : n$ hat man $z = \frac{1}{n+u} = n^2 \cdot \frac{1}{n+u}$ $= n^2 \cdot \left(\frac{u^0}{n} = \frac{u}{n^2} + \frac{u^2}{n^3} - \frac{u^3}{n^4} + \ldots\right)$; folgl. Inhalt DLQN $= \frac{LS}{CL} \cdot \int z = LS \cdot n \cdot \left[\frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2} + \frac{u^3}{3n^3} - \ldots\right]$.

Setzt man für u seinen Werth $CL = \frac{nx}{m}$, so wird dieser Inhalt $= LS \cdot n \left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4} \ldots\ldots\right)$.

Da nun beide Reihen einerlei sind, so hat man AGPM : DLQN = RG . m : LS . n; man hat aber RG . m = AGCH und LS . n = DLCK; folgl. verh. sich die zwischen prop. Ord. enthaltenen hyperbol. Räume AGPM, DLQN wie die Potenzen der Hypb., zu welchen sie gehören, und demnach auch wie die Rect. aus den Axen dieser Hypb.

§ 485. Zus. 1. Nennt man also a und b die halben Axen einer Hypb. c und d die halben Axen einer andern, so verh. sich die zwischen prop. Ord. enthaltenen hyperbol. Fl., oder, welches einerlei, die Log. derselben, durch diese Ord. oder die corresp. Absc. ausgedrückt wie die Rect. ab und cd; oder auch wie die über zwei bel. conj. Diam. gebildeten Prllgrme., weil alle diese Prllgrme. gl. den Rect. aus den Axen (§ 366.).

§ 486. Zus. 2. Wenn die zu vergleichenden Hypb. eine gemeinsch Axe haben, so werden die Log. der nämlichen Zahlen sich wie die ungleichen oder nicht gemeinsch. Axen verh. Wenn die Axen der einen den Axen der andern umgekehrt prop. sind, so sind die Log. der nämlichen Zahlen gl., weil alsdann ab = cd. Wenn die Hypb. ähnl. sind, oder, welches einerlei, wenn diese Curven in einerlei Asymptotenw. beschr. sind, so werden die Log. der nämlichen Zahlen sich verh. wie die Qdrte. der Axen oder der homol. Diameter.

§ 487. Zus. 3. Die Potenz einer Hypb. oder das Rect. aus ihren Axen ist folgl. immer das Maaß, welches die Grß. der den durch das Verh. der Ord. ausgedrückten versch. Zahlen entsprechenden Log. bestimmt; und der **Modul** eines Logarithmensystems ist nichts anders als diese nämliche der Hypb., welche dieses System giebt, zukommende Potenz.

§. 488. Zus. 4. Hat man also den Log. von einer bel.

Zahl in einer Hypb., deren Axen oder Potenz gegeben ist; und man verlangt den Log. von der nämlichen Zahl in einer andern Hypb., deren Axen oder Potenz auch gegeben sind, so darf man nur folgende Prop. machen: die gegebene Potenz der ersten Hypb. zur Potenz der zweiten Hypb. wie der gegebene Log. zum gesuchten Log.

§ 489. Zus. 5. Umgekehrt, wenn man die Log. von einerlei Zahl in zwei versch. Hypb. kennt, so findet man immer die Potenzen dieser Hypb. durch folgende Prop.: der Log. der Hypb., hat zu dem Log. der nämlichen Zahl in der Hypb.; von welcher man die Pot. sucht das nämliche Verhältniß, wie die gegebene Pot. zu der gesuchten Potenz. Z. B., um die Pot. von der Hypb., welche die Tafel der Brig. Log. zu finden giebt; so nimmt man von einer bel. Hypb. die Pot. = 1 an und sucht in dieser Hypb. den Log. von einer bel. Zahl wie den von 2) welchen wir (§ 482.) lg hyp. 2 = 0,69314702 gefunden haben. Man sucht nachgehend von derselben Zahl den Log. in den Tafeln oder lg tab. 2 = 0,30102992 und schließt: lg hyp. 2 : lg tab. 2

$$= 1 : x = \frac{\text{lg. tab. } 2}{\text{lg hyp. } 2} = 0{,}43429448,$$ welches der Modul

oder die Pot. der Hypb. ist, mittelst welcher man die lg tab. berechnen kann; man soll also diese lg tab. als lg hyp. ansehen; und es wäre sogar lächerlich, beide von einander zu unterscheiden; wenn man nicht den Namen Hypb. Log. auf eine gewisse Art nach einem besondern System berechnet der Log. beschränken will, wie es einige Schriftsteller gethan haben.

§ 490. Zus. 6. Also verh. sich ein bel. hyperbol. Trp. wie AGPM, oder der Log. von dem Verh. der Ord. AG,

MP, die ihn bestimmen, zu der Potenz der Hyperbel wie $\frac{\text{lg tab. a}}{\text{lg hyp. a}} : 1 = 4342944 : 1 =$ Mod. : 1; woraus es leicht ist, die Fl. dieses Trap. durch Hülfe der lg. tab zu finden, wie die folgende Aufg. zeigen soll. (Fig. 104).

§ 491. X. Aufg. Aus den bekannten Verhältnissen der Ordinaten AG, PM, die ein beliebiges hyperbolisches Trapez bestimmen, die Fläche dieses Trapezes mittelst einer logarithm. Tafel zu finden. (Fig. 104).

Aufl. Da die Hypb. AM gegeben ist, so ist ihre Pot. auch gegeben; man nimmt sie gl. 100000000 an, sucht nachgehends die Log. von jeder Ord. AG, PM, deren Differenz man nimmt, welches der Log. von dem Verh. $\frac{AG}{PM}$ dieser Ord. sein wird, und macht folgende Propt. 43429448 zu der Dif. der Log. der Ord. AG, PM wie 100000000 zu den zwischen den nämlichen Ordin. enthaltenen Flächen.

Anmerk. Man muß wohl bemerken, daß, wenn man den Modul 4342 . . . als eine ganze Zahl ansieht, die Diff. der gefundenen Log., auch als eine ganze Zahl betrachtet werden muß.

§ 492. Beisp. Angenommen, die Ord. AG, PM verh. sich wie 36 : 5; also lg 36 — lg 5 als ganze Zahl genommen = 85733250, so schließt man: 43429448 : 85733250 = 100000000 : AGPM = 19740810 gl. Theile von der Potenz.

Huyghens ist der erste, der diese Quadratur der Hyperb. gegeben hat; sie findet sich in seiner Abh. Horologio Oscillatorio mit dem Untersch., daß der Autor diese Aufg. löst, indem er den Log. von der Fl. AGPM sucht. Es ist viel bequemer, es so, wie wir eben gemacht haben, zu lösen, es sei denn, daß man sehr grß. log. Tafeln hat.

### Betrachtungen über die Natur des zwischen der Hyperbel und ihrer Asymptote enthaltenen unendlichen Raums. (Fig. 103)

§ 493. Wir haben (§ 472) bew., daß wenn die Absc. CA, CB, CD, CF in geom. Progr. wachsen, die Differenzen der nämlichen Absc. in geom. Progr. wachsen, während die ihnen zugehörigen Ordin. in demselben Verh. abnehmen. Nimmt man nun an, daß die zwischen der Hypb. und ihren Asympt. liegende Fl. zusammengesetzt ist aus endlichen Fl. ABLK, BDML 2c., den in geom. Progr. stehenden Dif. der Absc. entsprechend, so werden alle diese Fl. unter sich gl. sein (§ 472). Denkt man sich ferner eine letzte Ord. unendl. kl. in Betracht der erstern AK, so sind, um dahin zu kommen, in der geom. Progr. eine unendliche Menge Gl. nöthig; es sind also eine unendl. Menge von Diff. u. folgl. eine unendl. Menge von endlichen Fl. vorhanden gl. einer Fl. wie ABLK; dergestalt, daß die letztere selbst der erstern gl. ist; um eine jede dieser Fl. zu haben, muß man nothw. auf ihre Dimens. sehen, welches ihre Grdl. u. Höhen sind; aber es ist einleuchtend, daß wenn die Ord. des letztern hyperbol. Trp. unendl. kl. in Betreff der Ord. BL der ersten Trap. ABLK ist, auch die letzte Diff. der Absc. oder die Grdl. dieses letzten Trp. unendl. viel grß. als die erste Differ. AB sein wird; folgl. ist diese äußere Fl. auch noch eine endliche Grß. Demnach ist der ganze zwischen der Hypb. und ihre Asympt. enthaltenen Raum endlich. Die Einheit betreffend, in deren Betracht diese Fl. unendlich ist, so ist leicht zu sehen, daß sie erstens willkürlich ist, und man also durch ABKL diese Einheit vorstellen kann; nähme man aber statt der Fl. ABLK das Trp. ADMK = 2 ABLK; alsdann wäre der noch unendl. Quo-

tient, welcher anzeigt, wie oft der hyperbol. Inhalt diese zweite Fl. enthielte, doch nur die Hälfte von dem ersten unendlichen Quotienten, der anzeigte, wie oft der Inhalt ABLK in dem asympt. Raum enthalten wäre. Man kann aber ein Unendliches sich vorstellen, welches zu einem andern in einem gegebenen Verh. stehet, wenn man nicht übersieht, daß in zwei gegebenen L., welche ein endl. Verh. zu einander haben, man sich eine gl. Anzahl unendlich vieler Theile denken kann, und diese Unendlichen werden sich zu einander verh. als die gegebenen Linien.

§ 494. Zus. 1 Alle so eben gemachten Schlüsse, um zu zeigen, daß der asymptotische Raum unendlich ist, beruhen einzig darauf, daß die Ord genau in demselben Verh. abnehmen als die Absc. oder ihre Differ. zunehmen. Hieraus kann man eine Regel ableiten, um zu wissen, ob eine Reihe von einer unendlichen Anzahl Gl. eine endl. oder unendl. Summe haben muß. Dieserwegen muß man in jedem Gl. zwei Dimensionen betrachten; wenn nun die eine Dimension so zunimmt, als die andere abnimmt, so muß die Summe von allen nothw. unendlich sein. Nimmt eine der Dimensionen weniger zu als die andere abnimmt; oder, welches einerlei, wenn eine der Dimensionen mehr zunimmt als die andere abnimmt, indem man in diesem letztern Falle die Reihe in umgekehrter Ordnung nimmt, so kommt man nothw. zu einem Gl. gl. 0, und folgl. muß die Reihe eine endl. Grß. sein. Aus Mangel, auf die Identität dieser beiden letztern Fälle geachtet zu haben, hat Wallis diesen Raum für mehr als unendlich angesehen, wenn eine der Dimensionen mehr wächst als die andere sich vermindert; und andere Geometer haben nach ihm denselben Fehler gemacht:

macht: nur muß man bemerken, daß im letzten Falle die Reihe unter eine neg. Form kommt, sie ist aber immer endlich. Uebrigens ist dieses Prinzip nicht allein anwendbar auf den Fläch. der Curven, sondern auch noch auf die durch ihre Umwälzungen gebildeten Körper.

§ 495. Zus. 2. Man beweißt: wenn der unendliche asymptotische Raum CRSLXT sich um die Asymptote CT dreht, so wird er bei dieser Drehung einen endlichen Körper erzeugen, der doppelt so groß als eine Zahl, welche ein Kr. mit CR beschr. als Grdfl. und welcher RS zur Höhe hat; welches anfangs sehr überraschend scheinen kann. Wie kann ein endlicher körperlicher Raum durch die Umwälzung eines unendl. ebenen Raums entstehen? verändert etwa diese unendliche Erzeugungsfl. durch die Umwälzung ihre Natur? dieses ist nicht begreiflich. Mehrere möchten versucht sein, zu glauben, daß die Erzeugungsfl. nicht unendl. sei. Dieses wäre aber ein sehr grober Irrthum, denn aus denselben Gründen, nach welchen der asympt. Raum unendlich ist, folgt auch, daß durch die Unwälzung dieses unendlichen Flächenraums ein endlicher körperlicher Raum erzeugt wird; und man sieht hier eine glückliche Anwendung des im vorhergehenden Zus. vorgetragenen Satze. Die gl. Räume ABLK, BDML bilden, indem sie um die Asympt CT sich ganz herum drehen, eine Reihe von Körpern, in welchen man die Grdfl. und Höhe in Betracht ziehen muß. Die Grdfl. dieser Körper nehmen ab, wie die Qdr. der Ord. AK, BL rc., d. h., wie die Qdr. der Gl. einer ins Unendl. abnehmenden geom. Progr.; während daß die Höhen oder die Diff. AB, BD, DF wie die Gl. einer ins Unendliche zunehmenden geom. Progr. wachsen; es ist daher der letzte Körper nothwendig Null. Die Reihe muß also endlich

sein, folgl. muß der unendl. asympt. Raum einen endlichen Körper erzeugen.

§ 496. Um über den letzten Zusatz nichts zu wünschen übrig zu lassen, wollen wir den Inhalt des Körpers, der durch die Umdrehung des asymptotischen Raums um die Asympt. CT gebildet wird, suchen. Durch H sei HQ prll. mit der Asympt. CΓ und durch h sei hq der ersten unendl. nahe. Man kann sich vorstellen, daß der Körper aus unendlich vielen durch die Umdrehung eines kl. Trp., wie QqhH, gebildeten Ringen bestehet. Weil alle diese Ringe gl. Grdfl. haben, so werden sie sich verh. wie die durch die Umdrehung von QH um CT erzeugten Zylinderflächen. Die Summe von allen diesen kl. Körpern wird sich also verh. wie die Summe aller dieser Zylinderflächen. Es sei CR = a, RS = b, CQ = x, QH = y; es sei c die durch den Halbm. CR = a beschriebene Periph.; so wird man haben $a : c = x : \frac{cx}{a}$ gl. der durch den Halbm. CQ beschr. Periph. Folgl. ist $\frac{cxy}{a}$ die durch die Umdrehuug von QH beschr. Zyl.-Fl.; aber wegen der Gleich. $xy = ab$ hat man $y = \frac{ab}{x}$; folgl. $\frac{cxy}{a} = \frac{cabx}{ax} = cbx^{\circ}$; hieraus ist die Summe $cb\int x^{\circ} = cbx$, oder, wenn $x = a$ gemacht wird, der durch die Umdrehung des asympt. Raums erzeugte Körper $= abc = 2ba^2\pi$. Woraus augensch. folgt, daß dieser Körper doppelt so grß. als ein Zyl. ist, der den Kr. mit CR beschr. zur Grdfl. und RS zur Höhe hätte. Durch dieselben Prinzipien würde man finden, daß wenn die nämliche Fl. CRSLXT sich um die Asympt. CR drehete, ein unendlich großer Körper in Betreff des durch die Umdre-

hung des nämlichen Raums um die Asymptote CT gebildeten Körpers entstände.

---

## Zehntes Kapitel.

### Von den ähnlichen Kegelschnitten.

---

§ 497. Erkl. Zwei Kegelschnitte sind ähnlich, wenn die Axen Aa, Bb, der einen den Axen Dd, Ff der andern propt. sind. (Fig. 106, 107, 108).

§ 498. Zus. 1. Sie werden also ähnl. sind, wenn die Entf. eines Brennp. vom Mittelp. und von den Endp. der Axe propt sind; denn diese Proportionalität begreift nothwendig die der Axen; woraus augensch. folgt, daß alle Parb. ähnl. Fig. sind, weil die Entf. des Brennp. vom Scheitel und von Mittelp. sich immer wie eine endliche Grß. zu einer unendlichen verhalten.

§ 499. Zus. 2. Alle ähnliche Hypb. werden also die näml. Asympt. haben, wenn sie einen Mittelp. u. eine Axe gemein haben: und umgekehrt, wenn zwei Hypb. zwischen Asympt. enthalten sind, die einen gl. W. machen, so sind sie ähnl. Dieses ist eine Folge von der vorherg. Erkl. u. von der Beschr. der Asymptoten.

§ 500. Zus. 3. Folgl. alle L., die mit den Axen der ähnl. Kegelschn. gl. W. machen, wie die corresp. conj. Diam., die Tg. oder die homol. Sec., sind proportionale L., und die zwischen ähnl. Theilen von ähnl. Curven und homol. L liegenden Flächen verh. sich wie die Qdrte. der in jeder Curve auf gl. Art gezogenen Linien.

§ 501. Lehrs. Hat man in zwei ähnlichen und concentrischen Kegelschnitten, deren Axen auf einerlei Linien

gelegt sind, einen beliebigen Diameter CDA oder CAD gezogen, welche die innnere Curve in D schneidet, und durch diesen Punkt eine Tangente DL an derselben Curve gezogen, die sich im Punkt L der andern endiget; und eben so durch einen beliebigen Punkt M eine grade Linie MOPN auf beiden Seiten an der äußern Curve und parallel mit der Tangente in D gezogen, so wird man für jeden Kegelschnitt haben $MO \cdot ON = DL^2$. (Fig. 106, 107, 108.)

§ 502. Bew. Es seien a und p der halbe Diam. CA und sein Parm. $\alpha$ und $\pi$ der halbe coresp. Diam. CD und sein Parm. So ist sichtbar, daß MN, Oo das doppelte der Ord. auf den sie halbirenden Diam. CA und CD sein werden; man wird also haben

$$PM^2 : \pm CA^2 \mp CP^2 = p : a \text{ und}$$
$$PO^2 : \pm CD^2 \mp CP^2 = \pi : \alpha;$$

da nun die ähnlichen Kegelschn. geben

$$p : a = \pi : \alpha, \text{ so hat man}$$
$$PM^2 : \pm CA^2 \mp CP^2 = PO^2 : \pm CD^2 \mp CP^2;$$

mithin $PM^2 - PO^2$ oder $MO \cdot ON : PM^2 = \pm CA^2 \mp CD^2 : \pm CA^2 \mp CP^2$

und wegen der Ord. DL, PM,

$$\pm CA^2 \mp CD^2 : \pm CA^2 \mp CP^2 = DL^2 : PM^2; \text{ daher}$$
$$MO \cdot ON : PM^2 = DL^2 : PM^2$$
$$\text{folgl. } MO \cdot ON = DL^2.$$

Anmerk. Man muß bemerken, daß dieser Satz in der Prb. nur wahr sein kann, in so fern die L. AD die gesuchte sey, wenn die Prbeln so gestellt worden sind, als sie es sein müssen, um einen gemeinsch. Mittelpunkt zu haben. In jedem andern Falle fände man $MO \cdot ON = AP \cdot p - PD \cdot \pi$, welches gl. $DL^2$ wird, wenn die Parm. p und $\pi$ gl. werden. Man kann hieraus viel neue und sehr interessante Wahrheiten über die Verh. der versch. Unendlichen von einerlei Ordnung ableiten.

503. Zus. 1. Es sei ferner durch denselben P. O eine gr. L. ROS prll. einer tg. GK an der innern Curve, so beweist man eben so, daß RO . OS = GK²; folgl. wird man haben MO . ON : RO . OS = DL² : GK²; woraus folgt, daß wenn zwei bel. gr. L. RS, MN sich innerhalb eines bel. Kegelschnitts schneiden, so sind die Rect. der Segmente immer in einem constanten Verh., welches sich auch leicht für die äußern Sec. erweisen läßt.

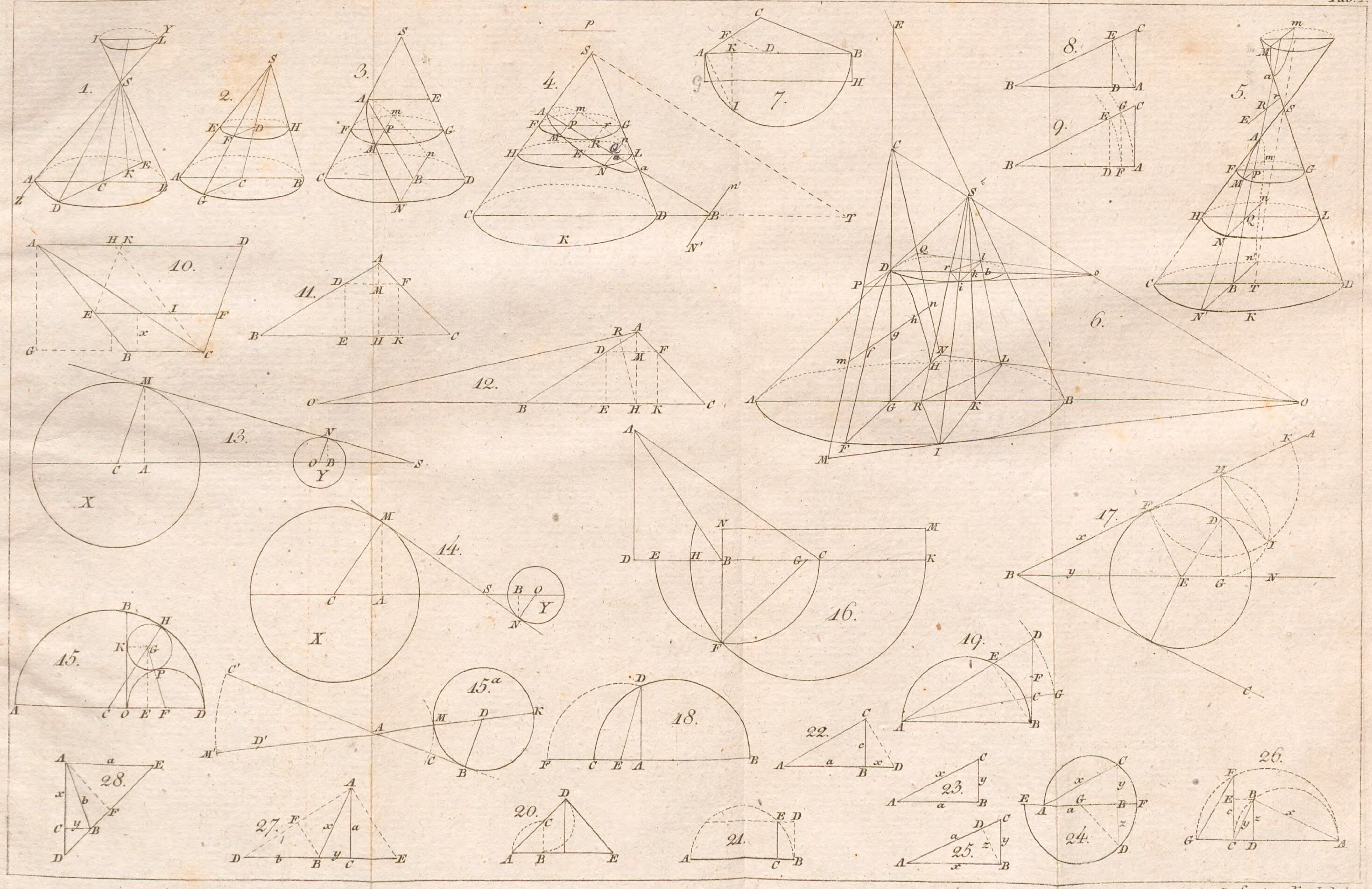
§ 504. Zus. 2. Es folgt hieraus noch ferner, daß die ähnl. und concentrischen Kegelschn., deren Axen auf einerlei gr. L., auch in Bezug aufeinander asymptotische Curven sind, d. h. sie nähern sich bis ins Unendliche, ohne sich jemals begegnen zu können, wenn sie wie die Parb. und Hypb. zwei unendl. Zweige haben; woraus ferner folgt, daß diese letztere Curve sich ihrer Asympt. unendlich nähern muß, weil diese zwei L. die Grenze von allen ähnl. Hypb. sind, die man in einerlei W. beschr. kann, und sie folgl. die Eigensch. der ähnl. Hypb. haben müssen.

Anmerk. Diese Aufg. ist eine der schönsten, die man über die Kegelschnitte geben kann, und man kann daraus sehr leicht alle die Constr. ableiten, welche Newton gegeben hat, um die Aufg. von Pappus zu lösen, wenn die Curve ein Kegelschn. ist. Man könnte ebenfalls davon Gebrauch machen, wenn verlangt würde, einen Kegelschn. unter gewissen Bedingungen durch mehrere Punkte zu legen. Die Grenzen dieses Werks erlauben es nicht, uns weiter darein einzulassen. Wißbegierige müssen größere Werke darüber zu Rathe ziehen und sich besonders mit der analytischen Behandlung der Kegelschnitte bekannt machen, die von mir dem Druck übergeben werden soll.

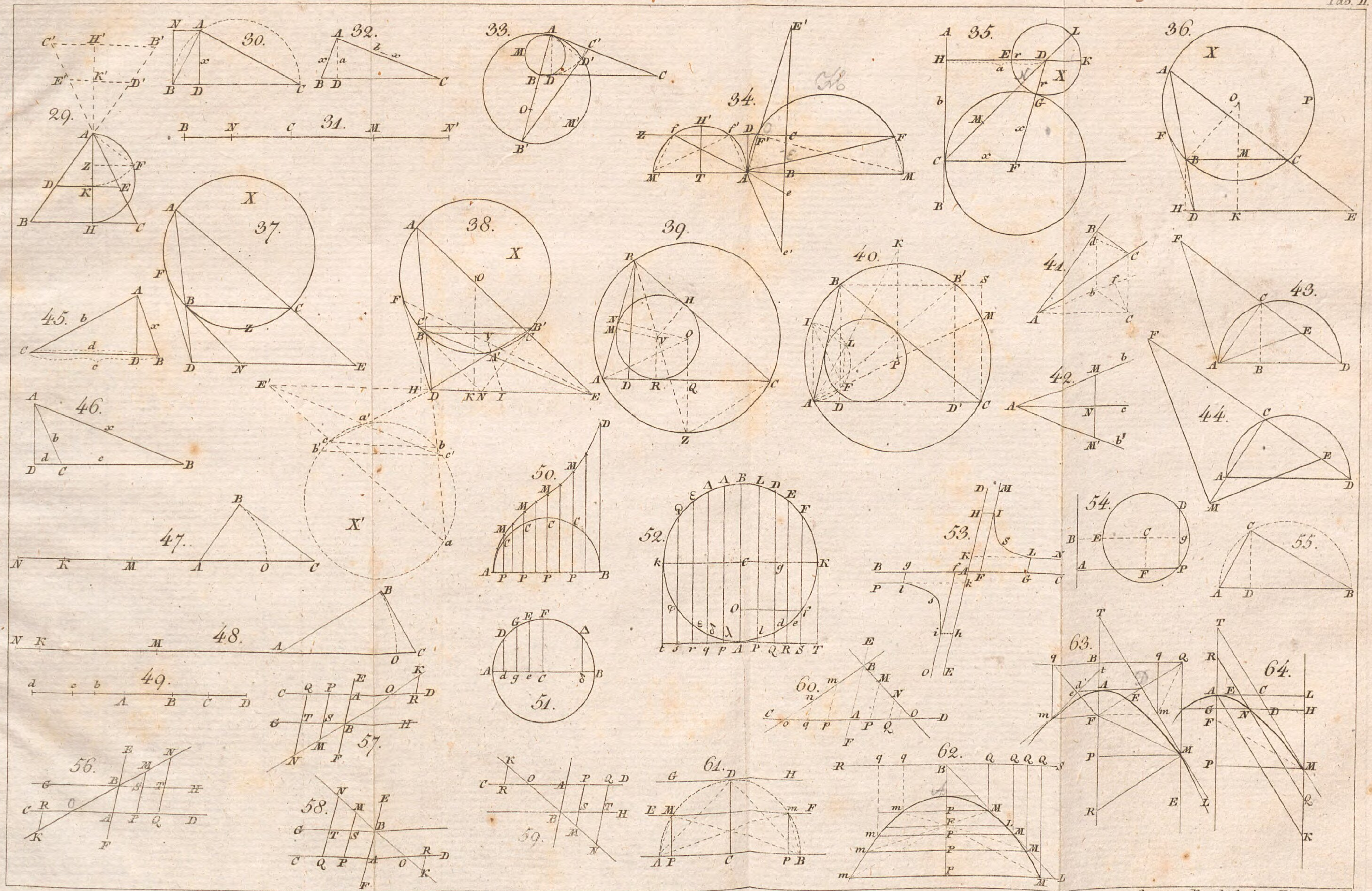
## Druckfehler.

S. 52 Z. v. o. 5 lies Fig. 15[a].
— 48 — v. o. 10 lies Fig. 32.
— 59 — v. u. 7 statt Verl. lies Verbinde (Fig. 58).
— 64 § 93 Z. v. o. 2 statt Grdl. lies Grundlage.
— 128 Z. v. o. 13 statt Grßt. lies Grß.
— 135 — v. o. 13 statt und geben lies zu eben.
— 208 § 387 Z. v. o. 6 lies Hyperbolische. Von S. 191 bis S. 208 lies Asymptoten.

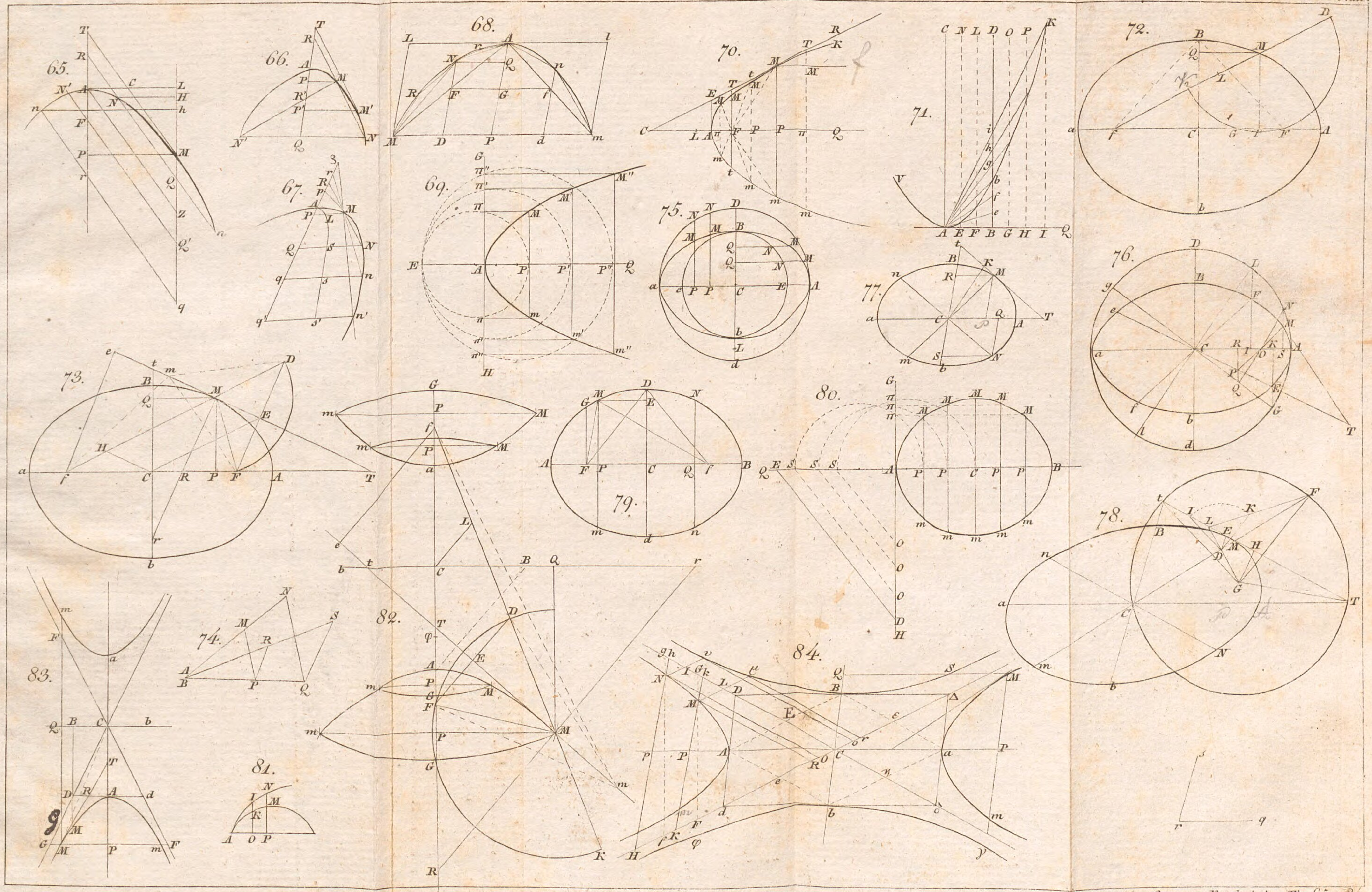
Berlin, gedruckt bei August Petsch.



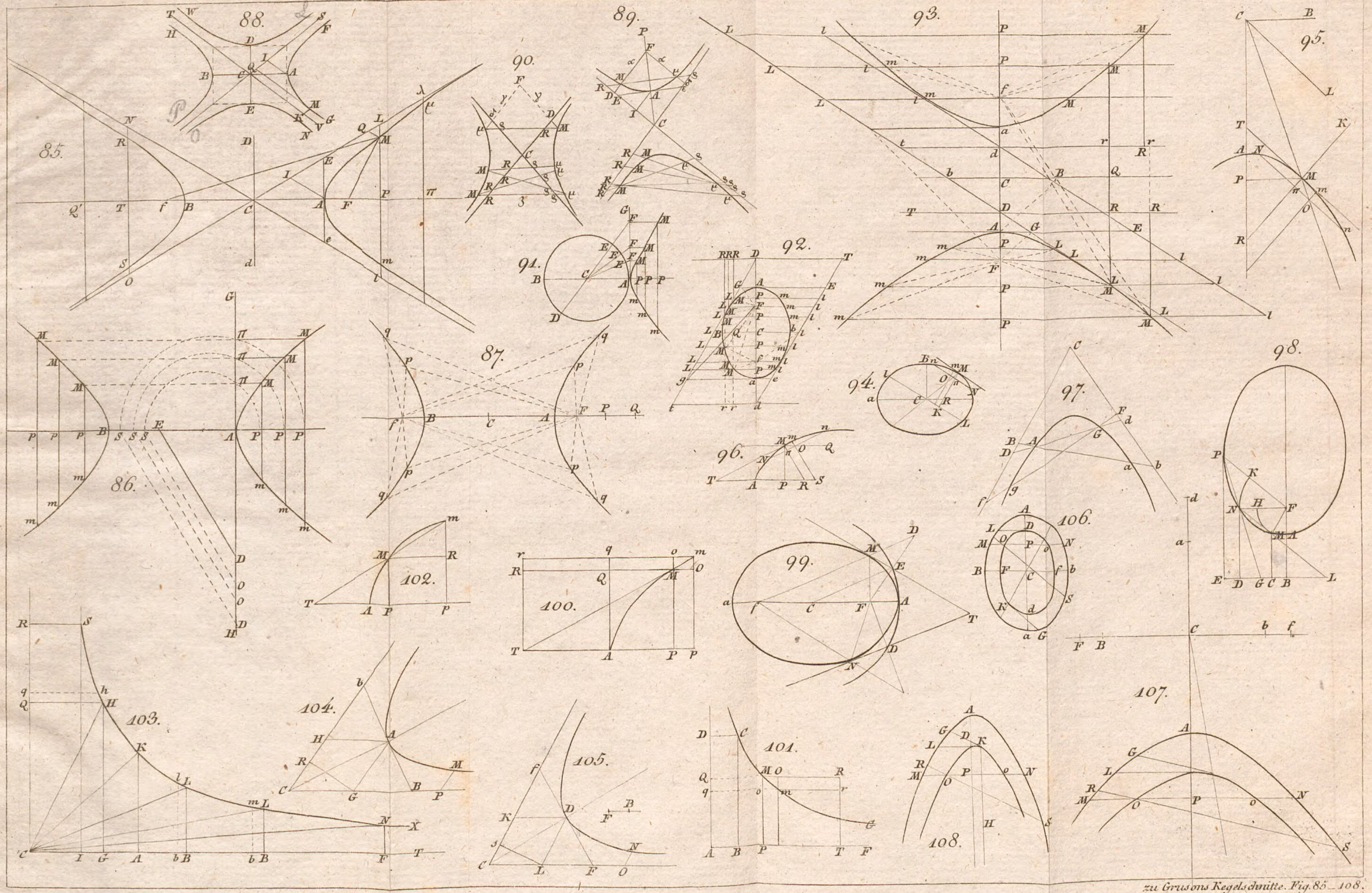
zu Grusons Kegelschnitte.
Fig. 1 _ 28.




zu Grusons Kegelschnitte. Fig. 29 _ 64.




zu Grusons Kegelschnitte. Fig. 65 _ 84.



zu Grusons Kegelschnitte. Fig. 85 _ 108.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grüson, Johann Philipp,

Die Kegelschnitte elementarisch geometrisch algebraisch zum Behufe der Vorlesungen abgehandelt

Berlin 1820

Math.p. 191 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081885-3